EVCLIDES
NOVO-ANTIQVVS
SINGVLARI METHODO ILLVSTRATVS.

AVTHORE

R. P. IOSEPHO ZARAGOZA E SOCIEtate IESV. In Suprema Hiſpaniarum Inquiſitione propoſitionum Fidei cenſore, olim in Collegijs Balearico, Barcinonenſi, & Valentino Scholaſticæ Theologiæ, modo in Matritenſi Acadæmia Imperialis Collegij Matheſeos Profeſſore Regio.

AD PERILLVSTREM DOMINVM

D. DIDACVM DE LA TORRE Marchionem de Caſaliche, in Conſilio Belli & Status Secretarium regium, &c.

SECVNDA EDITIO.

VALENTIÆ.

Apud Hieronymum Villagraſſa. Anno Domini M. DC. LXXIII.

Cum Superiorum licentia.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

EVCLIDES NOVO-ANTIQVVS

SINGVLARI METHODO

ILLVSTRATVS.

AVTHORE

R. P. IOSEPHO ZARAGOZA E SOCIETATE IESV. In Suprema Hiſpaniarum Inquiſitione pro Fidei cenſore, olim in Collegijs Valentino, Barcinonenſi, & Vicentino Scholaſticæ Theologiæ, modo in Matritenſi Academiæ Imperialis Collegij Matheſeos Profeſſore Regio.

AD PERILLVSTREM DOMINVM

D. DIDACVM DE LA TORRE

Marchionem de Caſaluche, in Conſilio Belli & Status Secretarium regium, &c.

SECVNDA EDITIO.

VALENTIÆ.

Apud Hieronymum Villagraſa. Anno Domini M.DC.LXXIII.

Cum Superiorum licentia.

PERILLVSTRI DOMINO D. Didaco de la Torre, virtute, literis, & ſanguine clariſsimo Heroi, Marchioni de Caſaliche Equiti Sancti Iacobi, Senatori meritiſſimo, Regiæ maieſtati à Secretis olim in Senatu Bellico, nunc in Status conſilio, & pro vniuerſis ſecretis in Atlantis defectum iam demandato Alcidi, &c.

PErantiquum vniverſæ Matheſeos cultorem, & communem Geometriæ Magiſtrum Euclidem nova luce illuſtraturus, à tua Dominatione Heros Illuſtriſsime, lux mihi, & claritas mutuanda fuit, vt qui virtute literis, & ſanguine in tanta Hiſpaniarum curia vir clariſsimus audis. Sanguinis ſplendor cæli oculum ſolem æmulatur, diſcrimine tamen non contemnendo, quod ille ſuis radijs lateat, tuus vero omnibus ſe ipſum pari, in hoc diſpari fulgore conſpiciendum exhibeat, & licet maximus, vixque vlli ſecundus principem in te locum ſibi non arrogat, & forte vt tibi morem gerat, quem nemo vnquam extolli viderit de tuo genere iactabundum; non ideo tamen oblitus es maiorum gloriæ, quam æmulatus nouo lumine afficeres. Atque hinc maximè nobiliſsimæ tuæ conditionis claritas eluceſcit, generoſo quippe animo tuo non aliud altius inſedit, quam propriæ nobilitatis obliuio ad faſtum; memoria ad æmulationẽ: ea ſcilicet indutus mente, vt laudem nullam reputes tuam,

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

niſi quæ labore parta ſit, & à tuis factis recens nata, non à Maioribus, ducat originem. Tua virtus, & probitas, tua eſt, quam hæreditario iure poſſidere non potes, ideoque hæc prima cordi tuo ineſt. Non occulta profero, quot enim facta, tot virtutis exhibes teſtes. Quam omnibus probata illa ſint, non ego dixerim, teſtabuntur alij: alij quidem & bene multi, cum vix vnus tanta in republica erit, qui non plura tuæ probitatis, tuæ lenitatis, ac virtutis tua argumenta ſuppeditet. Sed quid mirum, ſi vix erit vnus, quem tuæ beneficientiæ vincula non adſtrinxerint? Et ſi qui ſunt, hi adhuc rei huius teſtimonio poterunt deſervire, nam quæ in ſe ipſis egregia probi tui animi ſigna (quia defuit occaſio) experti non ſunt, collata in alios ſatis, ſuperque animadvertunt. Norunt omnes, videri te non tibi ſed totum alijs natum, cum ſaluti tuæ adimas, quod tribuas alienæ, & nihil tuum repu-tes, niſi quod benigno, Iovis inſtar, vultu in alios conferas. Hæc in cauſa ſunt, vt in omnium votis habea is, & omnes tibi deprecentur, & appetant munera, nobilitati, virtuti, & tuis literarum ſtudijs reſpondentia. Sortitus es animam bonam, ſed labore, & ſtudio meliorem fecisti: natam fuiſſe tecum ſapientiam crederent omnes, qui te, quantus es, totum regio muneri obeundo adſtrictum vident, ſi quam feſsis artibus adimis quietem, lectioni traditam non agnoſcerent. Quantum in humanioribus literis, hiſtoria, & Geographia profeceris, quantum in Ethicis, & Politicis mirantur, quotquot in tanta rerum multitudine expeditionis facilitatem, & felicitatem tuam, experti ſunt: Ideo te Regia maieſtas, ad bellica, & ſtatus ſecreta elegit, rebuſque

Sep-

Septentrionalibus accurandis præfecit: & ad vniverſam totius Monarchiæ Secretorum expeditionem vt Atlanti ſuffiicias voluit deſignatum. Vtinam tot animi dotes, quot D. O. M. in te larga manu profudit, in Regiæ Maieſtatis Obſequium, in communem vtilitatem, & literarum incrementum perennent.

V. Dominationis
Obſequentiſs. in Chriſto Servus.

Ioſephus Zaragozà.

Imprimatur. Imprimatur.

D.Greg.Antillon *D. Iacobus Madroño*
V. G. V. *R. F. A.*

FACVLTAS R.P.PROVINCIALIS.

EGo Didacus de Valdès Toletanæ Provinciæ Societatis IESV Provincialis ex ſpeciali commiſsione, quam habeo à N. A. R. P. Generali Ioanne Paulo de Oliva, facultatem concedo, vt imprimatur liber inſcriptus Euclides *Novo-antiquus* compoſitus à P. Ioſepho Zaragozà eiuſdem Societatis religioſo, qui viſus, & approbatus fuit à viris doctis noſtræ religionis in quorum fidem has dedi meo nomine ſubſcriptas, & ſigillo mei officij conſignatas. Matriti in Collegio Imperiali die 22. Martij anno Domini 1673.

Diego de Valdès.

OPERIS RATIO
GEOMETRIÆ STVDIOSO.

MAtheſeos difficultas totam requirit ingenij aciem, & Expoſitoris induſtriam, vt eius demonſtrationes perceptu faciles, atque expeditas etiam Tyronibns reddat. Brevior ſtylus præferendus non eſt, ſi obſcuritate laboret; neque prolixior verborum diffuſioni annexam habet claritatem ab omnibus expetitam. Doctrinæ methodus, ni mea fallatur ſententia, gradum ſemper obtinuit facile principem. Illatio ſponte fluit, ſi præmiſſæ ordinatæ præceſſerint. Vni igitur medio, & duobus extremis recté diſpoſitis vniverſa rationis moles innititur. Horum meditatio diuturna experaum me laboris improbi, quo ſcientia hæc nobiliſsima troprio Marte adipiſcenda ſit, ad novam Geometriæ tenpandam viam, & ſingularem methodum tredecim ab hinc tnnis inveſtigandam impulit. Tunc vero temporis Scholaſticæ Theologiæ penſum pro munere accurãdum, ideam hanc, vel informem ſpeciem recens conceptam iugi meditatione perficere non permiſit. At vbi primùm Theologico munere functus Matritum perveni, & à PP. Imperialis Collegij benevolentia ſingulari excolendo Matheſeos hoc Regio latifundio inſudare iuſſus, antiquam illam denuò mentem indui, vt deſideratum opus tentarem, & pro viribus aſsiduo labore perficerem. Intra quatuor menſes Geometria, Hiſpano ſermone prælo commiſſa fuit anno 1670. Cum vero poſtea Minimorum Geometriam demonſtrandam aſſumpſerim, iterum Euclidis elementa, hortantibus præcipuè Illuſtribus Mathematicis D.D. Vincentio Muto Baleari, & D.D. Iacobo Horten-

ten-

tenſio Lopez Valentino, & P. Andræa Iunio Scoto Societatis I E S V, Latine typis excudenda fuere, ne lectorem ad alienum opus amandaremus.

In duas igitur partes Geometriam diſtribuimus, ſpeculativam, & Practicam: in prima Euclidis theoremata, in ſecunda vero problemata continentur, vt quæ à theorematibus pendent, non è converſo. Singuli elementorum libri in ſuas claſſes diviſi ſunt, ſpeciebus enim coniunctis, minor eſt propoſitionum, & figurarum numerus, & facilius hæ memoria retinentur.

Non me latet Petrum Ramum nova methodo in 27. libros, quaſi ſpecies, elementa diſtribuiſſe, an vero præoptatam facilitatem fuerit conſequutus, alijs iudicandum relinquo. Noſtra Hiſpana Geometria iam excuſſa, videre etiam licuit P. Ciermans, & P. Ignatium.

Vtrumque noſtræ Societatis, qui novam tentarunt viam Euclide prorſus ommiſſo: ſed Rami pace dixerim, ordinem Euclideum non adeò abſonum eſſe, vt opus totum perturbandum fuerit, præcipuè cum diſpendium in Authorum lectione, qui à tot ſæculis nos ad Euclidem relegant, novæ methodi facilitate haud appareat compenſatum.

In hac igitur noſtra diſpoſitione Euclidis obſervantur libri ſolo theorematum ordine, prout ſpecies, & demonſtrationum claritas videbantur exigere commutato, aliquibus additis, quæ ad pleniorem Geometriæ cognitionem valde conducere viſa ſunt. Pauca vero in alios libros tranſtulimus, nempe *prop* 47. & 48. libri primi in 4. Secundi, quia ad linearum potentiam pertinebant: & 35. 36. 37. libri tertij ad 6. ſexti, quæ ad proportionem ſpectabant, tum primam, & ſecundam libri 12. in 5. ſexti, quæ à figuris planis ſegregari minime debuere. Definitiones collectæ reperientur in proœmialibus vtrique Geometriæ ſpeculativæ, & Practicæ communi-

munibus, vt qui praxi delectantur, & profundiori medi-
tationi vacare non poſſunt, terminorum explicationes
ediſcant, ne ſaltem eorum cognitione deſtitui videantur.

Hinc iam operis inſcriptio luculenter apparet. *Euclides Novo-antiquus* dicitur, quia ſcilicet mixta diſpoſitione veteri, & nova, expoſitus, & illuſtratus eſt: ac nobiliora theoremata ſingulari methodo ſunt demonſtrata. In hoc igitur opere fragili memoriæ conſultum fuit. dum in vnoquoque libro materia exponitur, & individua ad ſpecies reducuntur, haud difficile retinendas. Claritati etiam, & brevitati, ex quibus, ni fallor, ediſcendi facilitas magna, & non leve compendium experientia iam comprobatum exoritur: cum è diſcipulis aliqui duorum menſium ſpatio Theoremata, & problemata omnia rite perceperint, ac memoria retinuerint. Conſultum præterea fuit Authorum lectioni, qui nos ad Euclidis elementa remittunt; ſi enim librum conſideret lector, & ſpeciem citatæ propoſitionis, ſtatim in eodem libro noſtri ordinis propoſitio occurret, ex præfixo vnicuique titulo cognoſcenda: vnde nullam credo in alienis operibus evolvendis lectori confuſionem fore naſcituram Hic animus, hic ſcopus fuit, ſi finem adeptus ſum, cedet labor in communem vtilitatem, & Dei gloriam, & licet tanti operis menſura expleta non ſit, me tempus omnino contriviſſe non pœnitet: iuvat enim ardua irrito labore tentaſſe, quam facillima cuivis, & obvia perfeciſſe.

CITATIONVM EXPLICATIO.

CItationes intra parentheſim clauſæ ſunt. Litera P. cum numero præcedenti, ſignificat Proęmiale: vt (4. P.) Proœmiale quartum: & (22. P.) Proœmiale 22. & ſic de reliquis.

Litera l. cum ſequenti numero ſignificat librum, primum, vel ſecundum, &c. & numerus antecedens denotat propoſitionem illius libri: vt (4. l. 1.) quarta propoſitio libri primi, & (3. l. 6.) tertia libri ſexti, &c.

Litera N. denotat numerum præſentis propoſitionis: vt (3. N.) tertius numerus huius propoſitionis: & (2. N.) ſecundus numerus, &c.

Litera *p*. cum numero præcedenti ſignificat problema & ſequẽs numerus denotat praxim illius problematis: vt (3. *p*. 5.) tertium problema, & praxis quinta: at vero (5. *p*. 3.) quintum problema & praxis tertia, &c.

NOTARVM EXPLICATIO.

+ *Plus.* — *Minus.* △ *Triangulum.*

□ *Quadratum.* ▭ *Rectangulum.* ⬠ *Pentagonum.*

ER-

ERRATA CORRIGENDA.

Typographiæ errores omnino evitare hominis fere non eſt. Sequentes libuit annotare, qui lectorem retardare poſſent: alijs ommiſsis, qui licet ſolæciſmum, vel barbariſmum efficiant, lectori impedimento non erunt.

IN PROOEMIALIBVS.

Pag.	lin.	Error.	Correct.	Pag.	lin.	Error:	Corr.
14.	20.	AEY.	AEG.	36.	6.	OH.	OS.

IN GEOM. PRACTICA.

21.	15.	BD.	DE.	35.	2.	SO.	COE.
22.	21.	CH.	GH.	74.	5.	alium.	aliud.

ER-

ERRATA CORRIGENDA.

IN EVCLIDIS elementis.

Pag.	Lin.	Error.	Correctio.	Pag.	Li.	Error.	Correct.
10.	22.	ABC.	ABC.ADC.	64.	4.	AFG.	AGF.
11.	14.	ADE.	ADC.	74.	13.	C*ad*D.	C*ad*B.
17.	24.	ED.	EB.	83.	22.	& *X*.	& *Z*.
24.	10.	CT.	GF.	89.	14.	BCN.	BCD.
25.	12.	HRD	HBD.	89.	15.	DNE.	CBE.
25.	13.	HRF.	HBF.	98.	21.	F.R.	F.D.
31.	23.	BC.	AC.	110.	4.	EBC.	EBD.
38.	11.	AB.	DB.	116.	5.	A.	G.
43.	24.	AG.	AE.	119.	17.	ſi per-	ſit per-
44.	5.	AOG.	AOE.	120.	11.	AE.	AF.
48.	22.	BHC.	RHC.	135.	23.	GA.	PA&GA
55.	4.	exqual.	ex æqual.	135.	24.	*y*.	*z*. & *y*.

Errores iſti poſſunt Lectori offundere caliginem, ideoque ante omnia corrigendi ſunt, ne in demonſtrationibus ediſcendis magno temporis diſpendio, & capitis vertigine moram patiatur.

EV-

PROOEMIALIA GEOMETRICA IN EVCLIDIS ELEMENTA.

M*ATHEMATICA, quæ &* Matheſis *dicitur; eſt ſcientia quantitatis intelligibilis, provt ab omni materia præſcindit, & abſtrahit. Dividitur illa in* Geometriam, *&* Arithmeticam, *& quælibet in ſuas partes.* Arithmetica, *eſt ſcientia quãtitatis diſcretæ, cuius termini diſcreti ſunt, eò quod, vel non habeant vnionẽ; illam ve non exigant, quales ſunt numeri.* Geometria *eſt ſcientia quantitatis continuæ, cuius termini continui ſunt, & vniti, licèt quandoque ſolam habeant intelligibilem vnionem, v. luti partes intelligibilis ſpatij, quod vulgò imaginarium dicitur. Geometriæ igitur elementa ex poſituri à notioribus principijs exordium ſumimus.*

1.P. *Axioma.*

Quantitas aliqua congruere dicitur alteri quantitati, ſi ei ſuperpoſita ſit, & partes omnes alterius partibus integre correſpondeant. Vndê quãtitates congruæ, vel quæ cõgruentes eundem omnino locum occupare poſſunt invicem penetratæ, ſunt æquales, & ſimiles; ſicut ê converſo, quæ æquales, & ſimiles ſunt, congruere poſſunt; vt recta rectæ æquali; circulus circulo; quadratum quadrato, &c. Si verò diſsimiles fuerint non congruent, licêt ſint æquales: ſic triangulum quadrato æquali non congruit, quia diſsimilia ſunt.

2.P. *Axioma.*

Totum compoſitum omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis æquale eſt, quia ex ipſis componitur: & maius eſt qualibet parte, cũ præter ipſam includat alias partes, vel aliam ſaltem.

Partes ſimiles, vel eiuſdem denominationis ſunt, quæ eundem reſpectum habent ad totum: & ſi fuerint vnius, vel duplicis totius, vel compoſiti æqualis, partes ſimiles æquales erunt, vt dimidium eſt æquale dimidio,

ſextans ſextanti, &c. Si verò compoſita inæqualia fuerint, quod maius eſt, maiores etiam partes habebit; ſic dimidium cœli maius eſt dimidio mundi, &c.

3. P. *Axioma.*

Quantitates, quæ eidem tertiæ æquales ſunt, etiam interſe ſunt æquales. Similiter æquales ſunt, quæ eandem æqualiter continent; & quæ in eàdem æqualiter continentur. Tum etiam quæ æqualibus ſunt æquales; quæ æquales æqualiter continent; & quæ in æqualibus æqualiter continentur. Tandem quæ eidem tertiæ, vel æqualibus eundem, vel æqualem habent exceſſum; vel quæ ab eadem tertia, vel ab æqualibus æqualiter exceduntur, æquales ſunt interſe.

Quòd de qualibet quantitate dicitur reſpectu alterius, ſcilicèt eſſe maiorem, minorem, æqualem, duplam, triplam, &c. dimidium; quadrantem, ſextantem, &c. dicitur etiam de qualibet alia, quæ priori æqualis etſi diſsimilis fuerit.

4. P. *Axioma.*

Si æqualibus æqualis, vel communis quantitas addatur, vel ſubtrahatur, reſultans

æqualia. Si æqualibus inæqualia addantur, vel auferantur reſultabunt inæqualia, & maior erit quantitas, cui plus additum, vel minus ablatum fuit. Si verò inæqualibus addatur, vel ſubtrahatur æqualis quantitas, vel communis, reſultabunt inæquales, & maior erit quãtitas ipſa, quæ antea maior erat. Denique ſi ex tribus, vel pluribus quantitatibus prima ſit maior quàm ſecunda, & ſecunda quàm tertia, &c. etiam prima erit maior quam vltima, & ê contra.

5.P. *De Magnitudine.*

Magnitudo eſt quantitas continua menſurabilis; quæ ſi finita, & terminata fuerit, eius termini erunt magnitudinis extrema. Punctum mathematicum nec magnitudo eſt, nec ſumitur, vt pars componens magnitudinem: ſolum enim eſt ſignum indiviſibile, quod notatur in quantitate ad aliquid determinandum. Geometria ergo non inquirit an continuum phyſicum ex indiviſibilibus, aut partibus finitis, vel infinitis conſtet, cum omnes demonſtrationes ab vtroque præſcindant: quapropter ſententiæ de continuo Geometricis demonſtrationibus accommo-

modandæ ſunt;non è converſo.

6.P. *De Linea.*

Linea eſt magnitudo longa, ſine latitudine,nec profunditate; quæ motu indiviſibilis puncti formata,vel deſcripta concipitur. *Linea recta eſt*,quæ directè ſemper procedit ſine deflexione:hæc ſi finita fierit,directè procedit inter duo puncta, quæ ipſius termini, vel extrema ſunt. Linea igitur recta eſt breviſsima diſtantia inter duo puncta: vndè à puncto in punctum vna dumtaxat linea recta duci poteſt, quàm tamen infinite continuare licebit.

Linea curva eſt, quæ directè non procedit,deflectendo ſcilicèt ad hanc, vel ad illam partem;talis eſt linea circularis, & elliptica, quæ vulgo ovalis dicitur, & innumeræ aliæ, quarum deſcriptio ommittitur, vt à noſtro inſtituto prorſus aliena.

7.P. *De ſuperficie, & corpore.*

Superficies eſt magnitudo longa, & lata tantum, vel longitudo, & latitudo ſine profunditate. Concipitur ſuperficies ex lineis compoſita. Superficies plana eſt, quæ lineis rectis vndique conſtat, vel cui recta linea

qua-

quaqua verſum accommodari poteſt: aliter erit ſuperficies curva, aut mixta ex plana, & curva.

Corpus eſt magnitudo longa, lata, & profunda, quod *ſolidum* dicitur. Solidum ergo Phyſicum, & Mathematicum in hoc differunt, quod Phyſicum ſolidum habet partium vnionem firmam, prout ſcilicèt opponitur fluido. Solidum verò Mathematicum vtrũque, imò & etiam intelligibile ſpatium ſuo complectitur ſinu; cum tantum ſit magnitudo, quantitas, vel extenſio, quæ trinam dimenſionem longitudinis, latitudinis, & profunditatis admittit, ſivê partes vnionem habeant conſiſtentem, vt ferri, adamantis, &c. ſivê fluidæ ſint, vt aëris, aquæ, liquorumque omnium; ſivê intelligibiles tantum, quales ſunt in ſpatio vltra Empyreum effuſo, in quo infinita dei potentia innumeros terrarum orbes condere poteſt ê nihilo.

8. P. *De Circulo, & Diametro.* fig. 1.

Linea Circularis eſt linea obliqua æqualiter diſtans à certo quodam puncto, quod ſpatij comprehenſi medium eſt. *Circulus verò* eſt ſpatium illud à circulari linea comprehen-

henſum; eiuſque *centrum* eſt punctum illud medium. *Ambitus, perimeter, peripheria*, vel *circumferentia* eſt ipſa linea circularis prædictum circuli ſpatium cingens, & ambiens. Eadem peripheria, prout centrum reſpicit, *concava* dicitur, prout autem exterius à recta linea deflectit *convexa* nuncupari ſolet.

Deſcribitur circulus rectæ lineæ converſione altero termino quieſcente, & altero delineante: vt ſi linea EB. immoto puncto E. convertatur in gyrum, punctum B. ſuo motu peripheriam BDAC. deſcribet, & punctum illud E. quieſcens erit circuli centrū. Vnde fit, omnes rectas à centro in circumferentiam eſſe æquales interſe, cum omnes æquales ſint ipſi rectæ EB. quæ ſui converſione deſcripſit circulum. Rectæ à centro in circumferentiam vocantur *Radij*, vel *ſemidiametri*: omnes igitur *Radij* eiuſdem, vel æqualium circulorum æquales ſunt interſe.

Diameter eſt recta linea per centrum ex vtraque parte in circumferentiā terminata. Omnes diametri ſunt æquales, vt AB. CD. cum ſingulæ ex duobus æqualibus radijs cōponantur.

Quæ-

Quævis diameter circulum bifariam di-
vidit, hoc eſt in duas æquales partes. Sit enim diameter AEB. faciens duo ſegmenta ADB, & ACB. ſi concipiatur ADB. converti ſupra ACB. & ducantur quilibet radij EC. EF. &c. omnes, cum æquales ſint, in vtraque peripheria terminari debent: quodlibet ergo puctum arcus ADB. cadet ſuprà aliud arcus ACB. ergo cum arcus omnino congruant erunt interſe æquales(1. P.) & quilibet erit peripheriæ dimidium, vel *ſemiperipheria*, aut *ſemicirculus*.

9. P. *De Partibus circuli.* Fig. 1.

Quilibet circulus conſideratur à Mathematicis diviſus in 360. partes, quas vocant *gradus*: & vnuſquiſque gradus in 60. minuta, vel ſcrupula prima: deinde vnum quodque minutum in 60. ſecunda, & quodlibet ſecundum in 60. tertia, & ita infinite. Continet igitur circulus 360. *gradus*, ſemicirculus verò 180. *grad.* & quadrans circuli, qui eſt ſemicirculi dimidium continet 90. *grad.*

Arcus, eſt pars aliqua circumferentiæ circularis: vt arcus DA. vel AC. &c.

Chorda, vel *ſubtenſa*, eſt recta, quæ termi-
nat

nat arcum aliquem; vt recta linea AB. eſt chorda, vel ſubtenſa arcus ADB. vel arcus BCA. & recta CB. eſt *chorda*, vel *ſubtenſa* arcus CFB. & etiam arcus BGC. Vndè eadem recta eſt chorda, vel ſubtenſa duorum arcuũ, CFB. BGC. quorum alter eſt alterius complementum, quia illi duo circulum complẽt, & integrant.

Segmentum eſt area, ſuperficies; vel ſpatiũ comprehenſum inter chordam, & arcum: vt ſi ducatur recta CB. vtrinque in circumferentiam terminata; ſpatium inter chordam CB. & arcum CFB. eſt ſegmentum circuli: & ſimiliter ſpatium inter eandem chordam CB. & arcum BGC. aliud ſegmentum, quorum etiam alterum eſt alterius complementum; quoniam recta quælibet duo ſegmenta facit, quæ circulum complent.

Sector eſt ſpatium inter arcum, & duos radios illum terminantes comprehenſum: vt ſi arcus ſit FB. & ducantur ex centro radij EF. EB. totum ſpatium, EBF. dicitur ſector.

Arcus ſimiles, licèt inæqualium circulorum ſunt, qui totidem gradus comprehen-

dun: vt ſi vnus contjnet *60. grad.* contineat etiam alter *60. grad.* vnuſquiſque ſcilicet reſpectu ſui circuli: ita pariter *Segmenta ſimilia*; & *Sectores ſimiles* ſunt, qui arcubus conſtant ſimilibus.

10. P. *De Angulo, eiuſque menſura.* fig. 1.

Angulus planus eſt duarum linearum inclinatio concurrentium ad idem punctum, & in eodem plano exiſtentium: ſi lineæ rectæ ſint, erit angulus rectilineus: vt angulus ABC. qui rectis AB. CB. ad idem punctum B. concurrentibus efformatur. Si verò lineæ curvæ fuerint, erit angulus curvilineus. & mixtus ſi altera recta, & altera curva ſit.

Si duæ tantum rectæ concurrant, explicari poteſt angulus vnica ſolius concurſus litera: vt angulus B. Si verò tres, pluresve rectæ ad idem concurrant punctum, deſideratus angulus (cum plures ibi efformentur) explicandus eſt tribus literis, quarum ſemper media erit, quæ rectarum concurſum occupat: exempli gratia, in puncto E. concurrunt rectæ CE. FE. BE. angulus ergo CEF. idem eſt ac FEC. diverſus tamen ab angulo FEB. vel BEF. &c. Quod autem rectæ longiores, vel bre-

breviores ſint, diverſam rectarum inclinationem non efficiūt; ideoque nec maiorem, nec minorem angulum: vnde angulus ABC. idem omnino eſt atque EBO. vel OBE.

Anguli menſura eſt arcus inter rectas, quæ angulum efficiunt comprehenſus, cuiuslibet nempe circuli habentis centrum in linearum concurſu: vt ſi fuerit angulus CEB. & ex cētro, vel concurſu E. quilibet circulus deſcribatur, arcus CFB. inter rectas EC. EB. comprehenſus erit menſura anguli CEB.

Vnde ſi anguli CEB. & AED. æquales ſint, arcus CFB. DGA. eiuſdem, vel æqualium circulorum erunt etiam æquales; & arcus inæqualium circulorum erunt ſimiles totidem graduum: & è converſo ſi arcus æqualium circulorum fuerint æquales, vel inæqualium ſimiles, anguli æquales erunt, nempe eiuſdem valoris: ſi ergo arcus CFB: ſit 90. *graduum*, erit etiam angulus CEB. 90. *gr*. & ſi angulus CEF. ſit 30. *gr*. etiam arcus CF. erit 30. *gr*. &c.

Conſectarium ex eodem puncto E. rectæ EB. vnica tantum recta EC. duci poteſt, quæ angulum CEB. determinati valoris, aut al-

teri dato æqualem, exempli gratia *90. gr.* efficiat verſus eandem partem, quoniam arcus BFC. *90. grad.* terminatur in vnico puncto C. per quod tranſire debet recta quævis EC. vt determinatum angulum CEB. *90. gr.* efficiat cum recta EB.

11. P. *De angulo recto, & obliquo, & linea perpendiculari.* Fig. 1.

Angulus rectus eſt, qui complectitur circuli quadrantem, vel dimidium ſemicirculi, nēpé *90. gr.* Inde omnes anguli recti æquales ſunt interſe, quilibet enim eſt quadrans *90. grad.* & duo recti anguli efficiunt ſemicirculum 180. *grad.*

Linea perpendicularis alteri, quæ & abſoluté *recta alteri* dicitur, eſt quæ cum illa efficit duos angulos rectos, & ſemicirculum bifariam dividit: vt ſi ex centro E. recta EC. aſcendat, efficiatque arcùs AC. CB. æquales, erunt anguli AEC. CEB. recti, & æquales, tùm recta EC. *perpendicularis* erit ſuprà AB. quoniam ipſi *rectè*, vel *orthogonaliter* inſiſtit: cùm ad neutram partem habeat inclinationem.

Perpendicularis ex eodem rectæ puncto vnica

ca eſt; cum enim vnicum punctum C. dividat ſemicirculum ACB. in duas æquales partes, vnica recta EC. duci poteſt ex centro E. quæ ibi efficiat angulos rectos, & rectæ AB. ſit perpendicularis.

Angulus obliquus dicitur, qui rectus nō eſt. Si fuerit recto, vel quadrante 90. *gr.* minor. *Acutus* dicitur; vt angulus BEF. acutus eſt quia minor eſt recto BEC. vel quia ipſius menſura, nempè arcus BF. minor eſt 90. *gr.* vel quadrante BFC. Si angulus fuerit recto maior, vocatur *Obtuſus*: ſicut angulus AEF. obſtuſus eſt quia eſt maior recto AEC. vel quia arcus ACF. ipſius menſura excedit quadrantem AC. 90. *graduum*.

12. P. *De Triangulis.* Fig. 1.

Triangulum eſt figura tribus lateribus comprehēſa; & quia tres etiam continet angulos, ab eis *Triangulum*, vel Trigonum dicitur; & ſimiliter a tribus lateribus poteſt Trilaterum dici. Quòd deſcriptum eſt in ſuperficie plana dicitur *Triangulum planum*: quod verò in ſphærica ſuperficie *Triāgulum ſphæricum* nuncupatur. Prætereà Triangulum rectis comprehenſum dicitur *Rectilineum*, &

Cur-

Curvilineum quod curvis: ſimiliter *mixtum* quod ex recta, & curva componitur.

Triangulum, ſive planum, ſive ſphæricum ſit, varias accipit de nominationes tum ab angulis, tum à lateribus: quæ ſumuntur ex angulis hæ ſunt.

Triangulum rectangulum eſt quod habet vnum angulum rectum; vt triangulum GEB.

Triangulum Obliquangulum, eſt quod habet tres angulos obliquos: & nullum rectum, vt GEO, vel OEB.

Triangulum Obtuſangulum, vel *amblygonium* eſt quod vnum angulum obtuſum habet; vt EOC.

Triangulum Acutangulum, vel *Oxygonium*, eſt quod habet tres angulos acutos: vt AEG. vel BEO.

Triangulum æquilaterum, vel *Iſopleurum* eſt quod habet tria latera æqualia, vt AEY.

Triangulum Iſoceles, quod ſaltem habet duo latera æqualia, vt GEB.

Triangulum ſcalenum, quod habet tria latera inæqualia: vt GEO.

12. P.

13. P. *De Parallelis.* Fig. 2.

Lineæ rectæ *parallelæ* ſunt, quæ ſemper æqualiter diſtant, etiam in infinitum continuatæ: vnde fit nunquam poſſe concurrere. Explicationis gratia concipiatur triangulum rectangulum ABC. moveri ſuprà lineā AD. verticis punctum C. deſcribet rectā CCC. quæ ſemper habebit eandem diſtantiam, nempè CB, à recta AD. erūt ergo rectæ CC. & AD. parallelæ.

Similiter vbicumque ſiſtat triangulum ABC. latera CB. CB. æqualiter diſtabunt, ſicut etiam AC. AC. æquali enim motu dum B. tranſit in B. tranſit pariter A. in A. tum etiam C. in C. erunt igitur CB. CB. parellelæ, veluti etiam AC. AC.

Conſectatium 1. Si quælibet recta DA. ſecet parallelas, vtcumque AC. AC. vel BC. BC. ingrediens in eas efficit æquales angulos A. A. quia ſunt ipſemet angulus A. trianguli ABC. qui motu ſuo diverſum occupat locum; nulla partium facta variatione.

Conſectatium 2. Si recta DA. ingrediatur in alias æqualibus angulis A. A. erunt AC. e *et inversu* *procedente*

AC.

A C. parallelæ: cum enim parallela primæ A C, ipſum angulum efficere debeat; & ſecunda A C. illum efficiat in puncto A. nec vlla alia duci poſsit cum eodem angulo (ex 10. P.) erit ſecunda A C. primæ A C. parallela.

Conſectarium 3. Parallelæ habent perpendiculum commune; & è converſo, quæ habent perpendiculum commune ſunt parallelæ. Si enim B C. B C. ſint parallelæ, & recta D A. ipſas ſecet, ingrediens in eas æquales angulos efficit ex *conſect.* 1. ergo ſi cum prima faciat angulum rectum, etiam cum ſecunda; & ſic erit perpendicularis vtrique, vel perpendiculum commune. E contra verò ſi D A. ſit perpendiculum commune rectis C B. C B. erunt anguli B. B. recti æquales: ergo cum D A. ingrediens in primam C B. & ſecundam C B. æquales angulos rectos efficiat, erunt B C. B C. parallelæ ex *conſect.* 2.

Conſectarium 4. Si duæ rectæ in eodem plano alteri ſint parallelæ, etiam interſe erũt parallelæ: quoniam ſi æquali diſtantiæ addatur, vel auferatur diſtantia æqualis, reſultabit æqualis diſtantia: vt ſi prima C B. & ter-

tia

tia CB. ſecundæ CB. parallelæ ſint, etiam prima, & tertia ſunt interſe parallelæ.

14. P. *De Parallelogrammis.* Fig. 3.

Parallelogrammum eſt figura quatuor lateribus conſtans, quorum duo quælibet oppoſita ſunt parallela: vt OSHR. vel GFBD.

Rectangulum eſt Parallelogrammum habens quatuor angulos rectos: vt ſi quatuor anguli O.R.H.S.ſint recti, parallelogrammum ORHS.rectangulum erit.

Quadratum eſt Rectangulum æquilaterum: hoc eſt Parallelogrammum habens quatuor angulos rectos, & omnia latera æqualia: vt GDCE.

Rhombus eſt Parallelogrammum æquilaterum obliquangulum; quod ſcilicet habet latera omnia æqualia, & angulos obliquos: vt QLXP.

Rhomboides eſt Parallelogrammum, nec æquilaterum, nec rectangulum; hoc eſt quod habet duo latera inæqualia, & angulos obliquos: vt AQPZ.

Diameter Parallelogrammi eſt recta, quæ coniungit oppoſitos angulos: vt LP. in pa-

rallelogrammo QLXP. dicitur etiam *Diagonium*, vel recta *diagonalis*.

Centrum parallelogrammi eſt punctum vtrique diametro commune, in quo ſcilicet diametri ſe mutuo ſecant: vt V.

Parallelogramma deſcripta compendij gratia duabus tantum literis quæ in oppoſitis angulis ſunt, nominari ſolent: vt Parallelogrammum OH. idem eſt ac ORHS. & GB. idem ac GDBF.

Reliquæ figuræ quadrilateræ, quæ parallelogramma non ſunt *Trapezia* dicuntur, & quatuor angulorum literis nominari ſolent: vt ALPZ.

15. P. *De Potentia linearum.* Fig. 3.

Potentia lineæ eſt maius ſpatium quod ipſa quater ſumpta poteſt comprehendere; vel quadratum ex quatuor rectis ipſi æqualibus conſtans: vt quadratum GC, eſt potentia rectæ DC. quia omnia latera DC. CE. EG. GD. quæ comprehendunt ſpatiũ GC. æqualia ſunt ipſi rectæ DC.

Potentiæ igitur duarum, vel trium rectalium ſunt earum quadrata: *Quod ſi rectæ æquales ſint, etiã earum potentiæ, vel quadrata æqualia*

lia erunt : Si enim alterum alteri ſuperponatur, cum figuræ ſint æquales, & ſimiles, congruent (ex 1. P.) Et è conuerſo, *ſi potentiæ ſint æquales, etiam rectæ æquales erunt. Vndè maior recta maiorem habet potentiam, & quæ maiorem habet potentiam maior eſt.* Tandem ſi quadratum alicuius rectæ DF. æquale ſit quadratis rectarum DB. BF. dicitur, rectam DF. æquè poſſe ac duæ rectæ DB. BF. vel potentiam DF. æqualem eſſe potentijs DB. BF.

Potentia duarum rectarum eſt maius ſpatiũ, nempè rectangulum quod ex ipſis efformari poteſt: vt rectangulum GB. eſt potentia rectarum GF. FB. Quemadmodum dicitur quadratum ex vna recta deſcriptũ, eo quod latera ſint ipſi æqualia, ita rectangulum GB. licèt quatuor rectis conſtet, duabus rectis GD. GF. comprehenſum dicitur, quoniam oppoſita latera æqualia ſunt GD. FB. tum GF. DB.

Similiter Rhombus dicitur ex vna recta deſcriptus, & Rhomboides ex duabus: non tamen dicuntur abſolutè *Potentiæ*, quia non ſunt maxima ſpatia rectis comprehenſa, cum quadratum, & rectangulum maiora ſint

quolibet Rhombo, & Rhomboide, quæ rectis eiſdem efformari poſſunt.

Quando autem Quadrata, vel parallelogramma deſcripta non ſunt, eiſdem rectis, è quibus poſſunt conſtrui, nominantur: vt quadratum DC. eſt quod ex recta DC. poteſt deſcribi: ſimiliter rectangulum BF. FG. eſt quod rectis BF. FG. comprehendi poteſt; idemque omnino eſt de Rhombo, & Rhomboide.

Si verò duæ rectæ habeant idem punctum commune, exprimuntur rectangula tribus literis, quarum media eſt, quæ punctum cõmune occupat: vt rectangulum GEF. eſt quod rectis GE. EF. comprehendi poteſt; & rectangulum GFE. rectis GF. FE. &c. *Cum modus iſte loquendi Authoribus valde ſit familiaris, ſedulo obſervandus eſt ad eorum intelligentiam.* Quæ omnia parallelogrammis etiam non rectangulis accommodari poſſunt.

16. P. *De Polygonis.*

Figuræ rectilineæ, ſi quatuor latera, & angulos ſuperent, *Polygona* dicuntur. Quod ſi omnia latera æqualia ſint, itemque omnes

anguli æquales, erunt Polygona *regularia*, vel *ordinata*, nempê æquilatera, & æquiangula: ſit autem laera inæqualia ſint, vel anguli inæquales etſi lateribus æqualibus comprehenſi, erunt Polygona *irregularia*, vel *inordinata*.

Pentagonum eſt Polygonum quinque lateribus, & totidem angulis conſtans.

Hexagonum quod habet 6. latera, & angulos. *Heptagonũ* 7. *Octagonum* 8. *Enneagonũ*. 9.

Decagonum 10. *Vndecagonum* 11. Dodecagonum 12. &c. In omnibus Polygonis recta, quæ duos oppoſitos angulos iungit *Diagonium* dicitur, vel *linea diagonalis*.

17. P. *De contactu, Inſcriptione & circumſcriptione.* Fig. 4.

Quantitas aliqua tangit aliam, ſi vnum cum illa punctum commune habeat, neque aliud poſsit habere commune, licêt vtraque in infinitum continuetur; & punctum *contactus* eſt illud commune. Contingere ſolet *contactus* inter lineam rectam, & curvam, inter duas curvas, inter angulum, & lineam rectam, vel curvam: tandem inter planum, & ſphæram, &c.

Duo

Duo circuli ſe interius tangunt, quando alter intra alterum eſt, & commune cum eo punctum habet: ita circuli ARS. AMN. ſe interius in A. tangunt. Circuli exterius ſe invicem tangunt, ſi alter extra alterum ſit, habeantque vnicum punctum commune: vt circulus HAD. tangit exterius circulum MAN. ſi punctum A. ſit commune.

Recta tangens circulum eſt quæ cum illo habet vnicum punctum commune: vt recta BC. tangit circulum MAN. & etiam RAS. & HAD. ſi habeat vnicum punctum A. cum illis commune.

Angulus etiam tangit rectam, vel recta angulum; ſi punctum angulare ſit alteri rectæ commune: vt Angulus HAD. tangit rectam BC. in A. & recta BA. tangit angulum HAD: idemque omnino eſt de lineis circularibus, ſpiralibus, & quibuslibet curvis.

Figura inſcripta alteri eſt illa, cuius anguli tangunt alterius latera: *Circumſcripta* verò, cuius latera tangunt inſcriptæ angulos: *exem. gr.* Quadratum HD. inſcriptum eſt Quadrato BE. & è converſo BE. circunſcriptum ipſi HD. Similiter Quadratum HD. inſcrip-

tum

tum eſt circulo HFDA: & circulus HFDA. circumſcriptus quadrato HD: idemque circulus inſcriptus Quadrato GC. & quadratum GC. circumſcriptum eidem circulo, &c.

18. P. *De Ratione quantitatum.*

Ratio eſt reſpectus, relatio, vel habitudo vnius quantitatis ad aliam eiſdem generis ſecundum menſuram: lineæ ſcilicet ad lineã: ſuperficiei ad ſuperficiem, corporis ad corpus. In qualibet ergo *Ratione* duo ſunt termini, primus, qui comparatur, & dicitur *Antecedens*, ſecundus ad quem fit comparatio, & *conſequens* appellatur.

Quantitas reſpectu alterius, vel æqualis eſt, vel inæqualis: ſi verò inæqualis aut maior, aut minor eſt. Hinc *ratio* eſt *æqualitatis* ſi æqualis æquali cõparetur, vt 4. ad 4. & 3. ad 3.

Si inæqualis inæquali cõparetur, erit *ratio inæqualitatis*. Quod ſi maior comparetur minori dicitur *ratio maioris inæqualitatis*: vt 4. ad 2. ſi autem minor comparetur maiori eſt *ratio minoris inæqualitatis*: vt ratio 2. ad 4.

Si maior quantitas contineat minorem

ſe-

ſemel, & aliquam inſuper eius partem aliquotam, eſt ratio *ſuper particularis*: & dicitur *ſeſquialtera* quando maior minorem continet ſemel, & prætereà ipſius ſemiſſem: vt ratio. 3. ad 2. Deindè *ſeſquitertia* eſt, ſi contineat inſuper tertiam partem: vt ratio 4. ad 3. & *ſeſquiquarta* ſi quartam, & ita infinite: In his omnibus ſi minor comparetur maiori, habetur rationis nomen præpoſita particula *ſub*: ita *ſub ſuperparticularis*: & *ſub ſeſquialtera*, *ſubſeſquitertia*, *&c.* vt ratio 3. ad 2. eſt *ſeſquialtera*; ê contra verò ratio 2. ad 3. erit *ſubſeſquialtera*, &c.

Deindê ſi maior continet minorem ſemel, & aliquas prætereà partes, dicitur ***ratio ſuperpartiens***: & ê converſo ſi minor comparatur maiori erit ***ſubſuper partiens.***

Multiplex quantitas reſpectu alterius eſt, quæ alteram multoties continet; vel quæ ex altera aliquoties ſumpta integre eſt compoſita: & altera dicitut ***pars aliquota*** illius, quoniam aliquoties ſumpta illam integre exhaurit; ***exem. gr. 6.*** eſt multiplex numeri 2. quia ter hunc præciſe continet: & 2. eſt pars aliquota numeri 6. quoniam numerus 2. ter

ſump-

ſumptus integre exhaurit, vel rotunde componit numerum 6. eſtque 2. tertia pars huius 6. Reliquæ verò partes quæ integrê nõ componunt aliam, *partes aliquantæ vocantur*: vt 2. eſt pars aliquanta numeri 5. & 5. numeri 7. &c.

Ratio multiplex eſt illa cuius antecedens multiplex eſt conſequentis: & nomen accipit à numero continentiæ: *Dupla* ſi continet bis, *tripla* ſi ter, *quadrupla* ſi quater, &c. Si autem pars aliquota ſui multiplici comparetur dicitur ratio *ſubmultiplex* & ſimiliter *ſubdupla* ſi contineatur bis: vt ratio 2. ad 4. ita & *ſubtripla*, *ſubquadrupla*, &c.

Quando verò antecedens continet ſæpius conſequens, & aliquam eius partem, ratio nomen accipit, à multiplici, & à parte aliquota: ſic ratio 5. ad 2. eſt dupla ſeſqui altera, quia 5. bis continet ipſum 2. & præterea eius dimidium: ſimiliter ratio 13. ad 3. eſt quadrupla ſeſquitertia, &c. Si minor comparetur maiori, præponitur particula *ſub*, vt antea: vndê ratio 2. ad 5. eſt *ſubdupla ſeſquialtera*: & ratio 3. ad 13. *ſubquadrupla ſeſquitertia*, &c.

Alias Rationis ſpecies quæ etiam numeris explicari poſſent, vt hic minus neceſſarias libens ommitto, cum in noſtra Arithmetica videri poſsint lib. 1. cap. 11.

Ratio quælibet, vel *Rationalis* eſt, vel *Irrationalis*. Illa eſt, quæ numeris explicari poteſt, vt ratio 6. ad 3. &c. *Irrationalis* verò eſt quæ neque numeris integris, neque fractis exprimi poteſt, qualis eſt ratio, quam habet latus quadrati ad ſuam diametrum, & aliæ plures, quæ ad ſequentium intelligentiam non conducunt.

19. P. *De rationibus ſimilibus, & Proportione.*

Ratio aliqua rationi alteri æqualis, vel ſimilis eſt, quando vnius Antecedens ad ſuum conſequens eundem habet reſpectum, ac Antecedens alterius ad ſuum conſequens: Tunc enim eadem eſt habitudo, & ſimilis continentiæ, vel menſuræ modus, ideoque ratio eadem, vel ſimilis promiſcuè dicitur; idem enim vtrumque hic valet, *quod obſervatione dignißimum eſt.*

Exemplis fiet res manifeſtior: ratio 4. ad 2. æqualis, vel ſimilis eſt ratione 6. ad 3. vt

enim

enim 4. duplum eſt illius 2. ita 6. duplum eſt huius 3. Eadem igitur eſt habitudo, idem cõtinendi modus, idemque reſpectus: quamobrem vtraque illa ratio eadem, æqualis, vel ſimilis dicitur. Iterum ratio 2. ad 6. eadem eſt ac ratio 5. ad 15. vtraq; enim eſt *ſubtripla*: quoniam vt 2. eſt tertia pars illius 6. ita 5. eſt tertia pars huius 15. cum ergo eadem ſit habitudo, æqualis continentia, vel ſimilis menſurandi modus, æquê optimê dici poteſt ratio eadem, æqualis, vel ſimilis, quod idem omnino eſt.

PROPORTIO ergo (prout ab Euclide ſumitur) eſt rationum ſimilitudo: hæc græcê *Analogia* dicitur; cum autem Proportio ſit ſimilis reſpectus vnius, & alterius rationis, & qualibet illarum habeat duos terminos, ſcilicêt *Antecedens*, & *Conſequens*, habet proportio quatuor terminos, qui termini proportionales vocantur. *Exem. gr.* Ratio 4. ad 2. eſt ſimilis rationi 6. ad 3. ideoque illæ duæ rationes vnam proportionem conſtituunt, & quatuor illi termini ſunt proportionales, vt ſe habet 4. ad 2. ita 6. ad 3. &c.

Proportio, & ratio continua eſt quando pri-

mus terminus ad ſecundum eandem habet rationem, quam ſecundus ad tertium, & tertius ad quartum, & quartus ad quintum &c. quia eadem ratio continuatur, dicuntur termini tres, vel quatuor, vel quinque *proportionales continui*, vel *continuè proportionales*: quales ſunt hi ſequentes 1. 2. 4. 8. 16. &c. quoniam vt 1. eſt dimidium 2. ita 2. eſt dimidium 4. & 4. dimidium huius 8. &c. Quando verò ſunt tres continuè proportionales iam datur proportio: & ſunt vere quatuor termini, quoniam medius bis ſumitur: vt 1. 2. 4. ſunt tres continui, & in comparatione dicimus, ſicut ſe habet 1. ad 2. ita 2. ad 4. medius ergo eſt quaſi duplex terminus, cum ſit in prima ratione *conſequens*, & in ſecunda *antecedens*.

20. *De comparatione terminorum proportionalium.*

Termini proportionales comparari poſſunt *directè*, *alterne*, *inversè*, *compoſitè*, *diviſè*, & *converſe*. Hæc omnia lucem accipient in quatuor ſequentibus terminis proportionalibus, qui duas ſimiles rationes, & vnam proportionem conſtituunt. Hic obſervandum

eſt,

eſt, literarum loco ſubſtitui poſſe quoslibet numeros, lineas ſuperficies, vel corpora, dum ſimiles rationes conſtituant, quælibet illæ ſint, rationales, vel irrationales, &c.

Proportio.

Ratio 1.		*Ratio* 2.	
1. *Antec.*	1. *Conſeq.* *	2. *Antec.*	2. *Conſeq.*
1. *term.*	2. *term.*	3. *term.*	4. *term.*
vt B. 4.	*ad* C. 2.	*ita* D. 6.	*ad* E. 3.

Comparatio directa eſt quando primum *antecedens* comparatur ſuo *conſequenti* primo, & ſecundum antecedens ſecundo conſequenti: *exem. gr.* vt B. ad C. ita D. ad E. vel vt ſe habet 4. ad 2. ita 6. ad 3.

Alterna comparatio eſt quando termini alternê ſumuntur, & comparatur antecedens primum ſecundo antecedenti; & conſequēs primum ſecundo conſequenti: vel primus terminus proportionis comparatur tertio, & ſecundus quarto: *exem. gr.* vt ſe habet B. ad D. ita C. ad E. vel vt 4. ad 6. ita 2. ad 3.

Inverſa comparatio eſt quando conſequens ad ſuum antecedens refertur; vel conſequens fit antecedens, & ê converſo: *exem. gr.* vt ſe ha-

habet C. ad B. ita E. ad D. vel vt 2. ad 4. ita 3. ad 6.

Compoſita comparatio, quæ componendo fit, eſt quando ſumma, vel aggregatum antecedentis, & conſequentis refertur ad ipſum conſequens in vtraque ratione: explicari ſolet aggregatum, vel ſumma hoc ſigno + quod ſignificat *Plus*: Exempli gratia, vt ſe habet B+C. ad ipſum C. ita D+E. ad ipſum E, hoc eſt vt B. plus C. ad C. ita D. plus E. ad E. vel vt ſumma B. & C. ad C. ita ſumma D. & E. ad E. & in numeris, vt 4+2. ad 2. hoc eſt, vt 6. ad 2. ita 6+3. ad 3. hoc eſt ita 9. ad 3.

Diviſa comparatio, quæ dividendo fit, eſt quando diferentia antecedentis, & conſequentis refertur ad ipſum conſequens. Explicatur diferentia hoc ſigno – quod ſignificat *Minus*. Exem. gr. vt ſe habet B–C. ad C. ita D–E. ad E. hoc eſt, vt B. minus C. ad C. ita D. minus E. ad E. vel vt diferentia inter B. & C. ad ipſum C. ita diferentia inter D. & E. ad ipſum E. & in numeris, vt 4–2. ad 2. hoc eſt vt 2. ad 2. ita 6–3. ad 3. hoc eſt ita 3. ad 3.

Con-

Converſa comparatio eſt inverſio compoſitionis, vel diviſionis: *ex. gr.* comparantur *directè*, vt ſe habet B. ad C. ita D. ad E. & *compoſitè*, vt B+C. ad C. ita D+E. ad E. & *convertendo*, vt C. ad B+C. ita E. ad D+E. Iterum *directè*; vt B. ad C. ita D. ad E. & *diviſe*, vt B−C. ad C. ita D−E. ad E. & *convertendo*; vt C. ad B−C. ita E. ad D−E.

Ex quatuor terminis proportionalibus primus, & quartus dicuntur *Extrema*, & ſecundus, & tertius *Media* ſubſtantivê, aut termini extremi, & termini medij adiectivê. In ratione, vel proportione continua ſemper media ſunt duo minus, quàm terminorum numerus: vnde ſi termini continui ſunt tres datur vnum medium, ſi verò quatuor, erunt duo media, vel tria, ſi quinque, & ita in infinitum.

21. P. *De ratione Compoſita duplicata, triplicata, &c.*

Ratio compoſita eſt quæ ex alijs rationibus componitur; quemadmodum numerus componitur ex alijs numeris. Si ergo fuerint plures quantitates eiuſdem generis, ratio primæ quantitatis ad vltimam dicitur compoſita

ex

ex rationibus intermedijs; nempe ex ratione primæ ad ſecundam, & ſecunde ad tertiam, &c.

Sint ergo tres quantitates B.C.D.

B.18. C.9. D.3.

Ratio primæ B. ad vltimam D. eſt compoſita ex ratione B. ad C. & ex ratione C. ad D. ſcilicêt compoſita ex *dupla*, & *tripla* ratione, quemadmodum diſtantia inter B. & D. compoſita eſt ex diſtantia B. ad C. & ex diſtantia C. ad D.

Similiter ſi fuerint quatuor quantitates B.C.D.E. continuæ, vel non continuæ.

B.18. C.9. D.3. E.2.

Ratio prima B. ad vltimam E. compoſita eſt ex ratione B. ad C. & ex ratione C. ad D. & ex ratione D. ad E. ſcilicêt compoſita ex *dupla, tripla*, & *ſeſquialtera* ratione: Idem omnino eſt ſi quantitates fuerint quinque; ſex vel plures, dummodo ſint eiuſdem generis, nempê lineæ, ſuperficies, vel corpora; aut numeri.

Ratio duplicata eſt ratio compoſita ex duabus ſimilibus rationibus, vel ratio compoſita bis ex altera, ideoque *duplicata alterius* dicitur:

tur: *exem.gr.* Si B.C.D.fuerint tres quantitates continuè proportionales.

B.27. C.9. D.3.

Quoniam ratio B.ad D.compoſita eſt ex ratione B.ad C.& ex ratione C.ad D.quæ ſupponitur eadem ac ratio B. ad C. ideo ratio B. ad D. compoſita eſt ex duplici ratione æquali, vel ſimili:hoc eſt bis continet eãdem rationem B.ad C.Vndè ratio B.ad D. eſt duplicata rationis B.ad C.vel rationis C. ad D. *Quod ſedula meditatione obſeruandum eſt.*

Ratio ergo *Dupla*, & *Duplicata* maximè diferunt:ratio enim *dupla* eſt cuius Antecedens duplum eſt conſequentis, vel bis continet ipſum conſequens, vt ratio 4.ad 2.Ratio verò *Duplicata alterius*, eſt quæ bis continet alteram,quælibet iſta ſit,vel ſeſquialtera,vel dupla,tripla, &c. Exempli gratia. Ratio B. ad C. eſt *tripla* quoniam B. ter continet C. ratio autem B. ad D. eſt duplicata rationis triplæ B.ad C.quoniam bis continet ipſam, cum ex duabus ſimilibus B.ad C.& C. ad D. ſit compoſita.

Similiter ratio *triplicata* alterius rationis eſt,quæ ter continet illam; vel compoſita eſt

ex altera ter ſumpta, *ex. gr.* ſint quatuor quã-titates eiuſdem generis B. C. D. E. continue proportionales in ratione dupla, vel qualibet alia ſeſquialtera, tripla, &c.

B. 16. C. 8. D. 4. E. 2.

Erit ratio B. ad E. compoſita ex tribus rationibus B. ad C. tum C. ad D. tum D. ad E. & cum omnes eædem, vel ſimiles ſint, nempê duplæ, erit ratio B. ad E. compoſita ex triplici ratione B. ad C. ſcilicêt ex triplici ratione dupla: eſt igitur ratio B. ad E. triplicata rationis duplæ B. ad C. cum illam ter contineat, Vndê vniverſalem hanc theſim deducere licet.

Si fuerint plures termini continue proportionales, ratio primi ad tertium eſt duplicata rationis primi ad ſecundum: & ratio primi ad quartum eſt triplicata; primi ad quintum quadruplicata: primi ad ſextum quintuplicata, eiuſdem rationis primi ad ſecundum, & ita in infinitum. Hæc fuſius proſecutus ſum, quoniam Geometriæ ſtudioſis apprimê ſunt neceſſaria

22. P. *De compoſitione, & diviſione proportionali.*

Magnitudines compoſitæ, & diviſæ ſunt

pro-

proportionaliter interſe, quādo partes vnius partibus alterius ſunt proportionales: *ex.gr.* Fig. 3. part. I. rectæ RH. DB. compoſitæ, vel diviſæ erunt proportionaliter, ſi RM. ad MH. ſit, vt DC. ad CB. ita pariter rectangula OH. GB. compoſita, & diviſa ſunt proportionaliter interſe, ſi rectangulum RN. ad NH. habuerit eandem rationem, quàm DE. ad EB. idemque prorſus eſt de quibuslibet alijs quantitatibus.

Magnitudo aliqua (linea, ſuperficies, vel corpus) diviſa eſt *proportionaliter*, vel ſecundũ *mediam, & extremam rationem*, quando minor pars ad maiorem habet eandem rationem, quàm pars maior ad totam magnitudinem ex ipſis compoſitam. *Exem.gr.* ſi recta BD. ita (Fig. 3. citat.) ſit diviſa in C. vt minor pars BC. ad maiorem CD. habeat eandem rationem, quam maior pars CD. ad totam BD. erit BD. *proportionaliter*, vel *medià, & extremà ratione* diviſa. Idem omnino eſt de parallelogrammo BG. ſi BE. ad ED. ſe habeat, vt ED. ad BG. Dicitur hæc diviſio *ſecundum mediam, & extremam rationem*, quoniam eſt tribus continue proportionalibus, reperiuntur in eàdem magnitudine medium, & extrema, cum ma-

ior pars ſit medio loco proportionalis inter minorem, & totam magnitudinem.

Figuræ ſimiles ſunt, quæ æqualibus conſtant angulis, & latera circa ipſos habent proportionalia: *exem. gr.* Si rectangulum OH. æquiãgulum ſit rectangulo GB. & latus OS. ad SH. habeat eandem rationem, quàm latus GF. ad FB. erit rectangulum OH. ſimile rectangulo GB. Idem omnino dicendum eſt de Triangulis RSH. & DFB. ſicut etiam de alijs planis, vel ſolidis.

Latera Homologa in figuris ſimilibus ſunt, quæ æquales angulos comprehendunt: vt in rectangulis ſimilibus OH. & GB. cum anguli O. & G. ſint æquales, latera OS. OR. homologa erunt lateribus GF. & GD.

Reciprocæ figuræ ſunt quæ habẽt latera ***reciproca***, vel ***reciprocè proportionalia***, hoc eſt, ſi ex quatuor proportionalibus duo extrema ſint in vna figura, & duo media in altera: vt ſi in triangulis RHS. & FBC. proportionales fuerint RH. ad FB. ſicut BC. ad HS. erunt latera ***reciproca***, & figuræ reciprocæ, idemque erit de rectangulis OH. & EB. quoniam duo media FB. BC. ſunt in vna figura, & duo extre-

trema RH. HS. in altera.

23. F. *De Solidis in communi.*

1 *Linea perpendicularis plano* eſt, quæ planum ſecat in puncto, & perpendicularis eſt omnibus eiuſdem plani rectis per illud punctum tranſeuntibus.

2 *Communis planorum ſectio* eſt communis linea, quæ in omnibus planis ſe interſecantibus reperitur.

3 *Planum plano rectum, vel perpendiculare* dicitur, quãdo omnes rectæ illius plani, quæ perpẽdiculares ſunt communi ſectioni, ſunt etiam alteri plano perpendiculares.

4 *Planum plano alteri inclinatum* eſt, quod alteri non eſt perpendiculare. *Inclinatio*, vel *inclinationis angulus* eſt acutus angulus, quem duæ rectæ ſectioni communi perpendiculares in eodem puncto efficiunt, quarum vnaquæque eſt in diverſo plano. *Inclinatio ſimilis* eſt, quæ æquali menſuratur angulo inclinationis.

5 *Plana parallela* ſunt, quæ, licêt infinitè continuata, ſemper diſtant æqualiter.

6 *Solida ſimilia* ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

7 *Solidus angulus rectilineus* eſt, qui tribus, vel pluribus angulis continetur, qui ſunt in diverſis planis, & vnicum angulare punctum commune habent. *Similes* ergo, vel *æquales anguli ſolidi* ſunt, qui totidem, & ſimilibus planis angulis comprehenduntur ſimiliter diſpoſitis.

24. *De Solidis in particulari.*

1 *Priſma* eſt ſolidum, cuius ſaltem duo plana oppoſita ſunt parallela, æqualia, & ſimilia, reliqua verò parallelogramma.

2 *Parallelepipedum* eſt ſolidum conſtans ſex planis parallelogrammis; quorum duo quælibet oppoſita ſunt interſe parallela.

3 *Cubus* eſt ſolidum parallelepipedum ſex planis quadratis comprehenſum.

4 *Pyramis* eſt ſolidum tribus, vel pluribus planis comprehenſum ad idem punctum terminatis, & alio plano ſectis: vel eſt Angulus ſolidus novo plano ſectus. *Baſis* huius Pyramidis eſt planum, cui inſiſtit, vel quod ſolidum angulum ſecat. Hæc baſis trilatera eſſe poteſt, quadrilatera, vel pentagona, &c. *Vertex pyramidis* eſt punctum in quod Pyramis terminatur.

5 Co-

5 *Conus* eſt quaſi pyramis habens circularem baſim; à cuius vertice omnes lineæ ad baſis peripheriam terminatæ; ſunt rectæ; & *latera coni* dicuntur. *Axis coni* eſt recta à vertice in cẽtrum baſis, quæ ſi plano circuli fuerit perpendicularis dicitur *Conus rectus*, ſin autem *ſcalenus*, vel *obliquus*.

6 *Cylindrus* eſt ſolidum inter duos circulos æquales, & parallelos æqualiter erectum. *Baſes cylindri* ſunt dicti circuli. *Latera cylindri* ſunt rectæ in ſuperficie cylindri à peripheria in peripheriam. *Axis cylindri* eſt recta linea baſium centra coniungens; quæ ſi vtrique plano circulari perpendicularis fuerit, *cylindrus rectus erit*, aliter *obliquus*, vel *ſcalenus* dicitur.

7 *Cylindri ſimiles*, & *coni ſimiles* dicuntur qui axes habent diametris baſium proportionales.

8 *Sphæra*, vel *Globus* eſt ſolidum vnica ſuperficie comprehenſum, ex cuius centro omnes rectæ lineæ in ſuperficiem ſphæricam ſunt æquales, & *radij* dicuntur, vel *ſemidiametri*. Sphæræ *diameter* eſt recta per centrum in vtramque partem ſuperficiei terminatam.

9 So-

9 *Solida Regularia*, vel *ordinata* ſunt, quæ planis æquilateris, & æquiangulis comprehenduntur. *Tetraëdrum* eſt ſolidum quatuor triangulis æquilateris, & æquiangulis comprehenſum. *Hexaëdrum regulare* eſt cubus ſex quadratis contentus. *Octaëdrum* eſt ſolidum octo æquilateris, & æquiangulis triangulis cōſtans. *Dodecaëdrum* eſt ſolidum quod duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis continetur. *Icoſaëdrum* eſt ſolidum viginti æquilateris, & æquiangulis triangulis comprehenſum.

10 *Solidum ſolido inſcriptum* dicitur ſi omnes illius anguli ſolidi, vel angulos, vel latera, vel plana ſolidi alterius tangant: & è converſo alterum dicitur *circumſcriptum*.

PROEMIALIVM FINIS.

LIBER PRIMVS.

ELEMENTORVM EVCLIDIS.

De Lineis, Triangulis, & Parallelogrammis.

PRIMVS Hic liber agit de Lineis, Triangulis, & Parallelogrammis, & continet apud Euclidem 48. propoſitiones, quarum 14. ſunt Problemata, & 34. Theoremata; illa ad Geometriam Practicam ſpectant, hæc verò ad 8. Propoſitiones contracta ſunt.

Propoſitiones, libri primi.

Prop. 1. *De Lineis concurrentibus.*
Prop. 2. *De rectis Parallelis.*
Prop. 3. *De Figurarum Angulis.*
Prop. 4. *De Triangulis omnino æqualibus.*
Prop. 5. *De Trianguli partibus.*
Prop. 6. *De Triangulorum inæqualitate.*
Prop. 7. *De Parallelogrammo in ſe ipſo.*
Prop. 8. *De Triangulis, & Parallelogrammis inter ſe.*

PROPOSITIO I.
De Lineis concurrentibus.

pp 13. 1 *Anguli in eodem puncto ſupra rectam deſcripti æquivalent duobus rectis.*

converſa præcedent. 2 *Si anguli in eodem puncto deſcripti æquivalent duobus rectis, ſupra eamdem ſunt rectam.*

corollarium 12. 3 *Si anguli plus, aut minus valeant quam duo recti, ſupra eandem rectam non ſunt conſtituti.*

coroll. pp. 13. 4 *Anguli omnes, qui efformari poſſint in eodem puncto, æquivalent quatuor rectis.*

5 *Si duæ rectæ ſe interſecant, anguli verticales oppoſiti ſunt æquales.*

DEMONSTRATIO. Fig. 1.

1 *Supra rectam AB, in puncto E, facti ſint quicumque anguli: dico eſſe duobus rectis æquales.* Si enim ex puncto E, deſcribatur circulus ACBD, & arcus AC, CB, ſupponantur æquales, erunt anguli AEC, CEB, duo recti (11. P.) Si verò recta EF, ſecuerit inæquales arcus BF, FA, illi duo ſimul ſumpti integrum ſemicirculum efficient ACB; ergo duo anguli BEF, FEA, æquivalent duobus rectis, ſimiliter cum tres arcus BF, FC, CA, conſtituant ſemicirculum, tres illi anguli BEF, FEC, CEA, duobus rectis æquales erunt.

2 *Si duo anguli AEF, FEB, vel tres illi AEC. CEF. FEB, æquivalent duobus rectis, erit AEB, eadem recta.* Quoniam arcus AC, CF, FB, ſemicirculum conſtituunt (11. P. 1) ergo erit AEB, diameter, & AE, EB, vna, & eadem recta.

3 *Si anguli duo AEC, CEF, vel tres alij AEF, FEB, BED, minus, vel plus fuerint, quam duo recti, non erunt AE, & EF, eadem recta, ne-*

que AE, & ED. Si enim dicti anguli eſſent ſupra eandem rectam, nec plus, nec minus eſ-ſent quam duo recti (1. N.) quod eſt contra hypotheſim.

4 *Omnes anguli, qui poſſunt deſcribi in eodem puncto E, quatuor rectis æquivalent*; Quoniam circulum integrum comprehendunt, arcubus ſcilicèt AC, CF, FB, BD, DG, GA: ergo anguli omnes AEC, CEF, FEB, BED, DEG, GEA, æquales ſunt quatuor rectis (11. P.)

5 *Si duæ rectæ CD, GF, ſe interſecant in E, anguli verticales, nempè oppoſiti CEF, GED, æquales ſunt interſe.* Deſcripto enim ex E, circulo æquales erunt ſemicirculi DGC, GCF, (8. P.) ergo ablato vtrinque communi arcu GAC, remanebunt æquales arcus CF, GD, (4. P.) ergo oppoſiti anguli CEF, GED, æquales erunt, cum habeant æquales menſu-ras (10. P.) *Similiter verticales obtuſi FED, GEC, æquales erunt*, quoniam ſemicirculi FDG, DGC, æquales ſunt: ergo ablato communi arcu DG, remanēt æquales arcus FBD, GAC, & anguli FED, GEC.

PRO-

PROPOSITIO II.
De rectis parallelis.

1 *Si recta in parallelas incidat, angulos externos oppoſitos æquales efficit.*

2 *Tum etiam angulos alternos æquales.*

3 *Et internos ad eaſdem partes efficit æquales duobus rectis.*

4 *E converſo, ſi recta in alias incidens prædictos efficiat angulos, illæ ſunt parallelæ.*

5 *Si duæ rectæ non ſunt parallelæ, recta ipſas ſecans non efficiet prædictos angulos: & ſi ipſos non efficit, illæ non ſunt parallelæ.*

DEMONSTRATIO. Fig. 2.

1 *Sint AB, CD, parallelæ, quas ſecat EF. dico angulos externos oppoſitos EHC, FGB, eſſe æquales.* Quoniam recta EF. ingreditur in parallelas æqualibus angulis, erunt anguli 1. & 4. æquales (13. P.) ſed etiam 4. & 6. ſunt æquales, quia ſunt verticales (1. l. 1.) ergo etiam anguli 1. & 6. nempè externi oppoſiti erunt interſe æquales (3. P.)

2 *Recta EF, ſecat parallelas AB, CD, di-*

co angulos alternos, 2. & 4. nempè internos oppoſitos in contrarias partes, eſſe æquales. Quoniam anguli 1. & 2. verticales ſunt, & æquales (1. l. 1.) ſed etiam 1. & 4. æquales ſunt quia EF. ingreditur in parallelas æqualibus angulis (13. P.) ergo etiam 2. & 4. æquales ſunt (3. P.) ſimiliter oſtendentur æquales alterni 3. & 5.

3 *Si EF, parallelas ſecet AB, CD, anguli interni ad eaſdem partes, nempè 2. & 5. æquales ſunt duobus rectis: tum etiam 3. & 4.* Quoniam anguli 4. & 5. æquantur duobus rectis, cum ſupra rectam in eodem puncto deſcripti ſint (1. l. 1.) ſed alterni 4. & 2. ſunt æquales (2. N.) ergo etiam 2. & 5. æquales erunt duobus rectis.

4 *Si recta EF. incidens in CD, & AB, prædictos efficiat angulos; ſcilicèt internum, & externum oppoſitos 1. & 6. æquales. Item alternos 2. & 4. æquales: Item internos ad eaſdem partes 2. & 5. æquales duobus rectis erunt AB, CD, parallelæ.*

Quoniam recta, quæ per punctum G, ducenda ſit parallela ipſi CD, efficiet cum EF. omnes prædictos angulos in G. ex demonſtra-

ſtratis, *num.* 1.2.& 3. ſed per punctum G, vnica tantum recta poteſt efficere eoſdem angulos (10. P.) ergo cum recta AB, illos efficiat eſt ipſa parallela rectæ CD.

5 *Si AB, & CD, non ſint parallelæ recta EF, ſecans ipſas non efficit dictos angulos: & ſi illos non efficit non ſunt AB, & CD, parallelæ.* Si enim dictos angulos efficerent eſſent parallelæ ex *num.* 4. & ſi eſſent parallelæ ipſos efficerent ex *num.* 1.2.3. ergo, &c.

PROPOSITIO III.

De Figurarum angulis.

1 *Anguli omnes cuiuſvis trianguli æquantur duobus rectis.*

2 *Continuato latere trianguli angulus externus æquatur duobus internis oppoſitis.*

3 *Anguli omnes cuiuslibet figuræ rectilineæ æquivalent bis tot rectis quot ſunt figuræ latera minus quatuor.*

4 *Omnes anguli externi cuiuslibet figuræ rectilineæ quatuor rectis æquales ſunt.*

CONSECTARIA.

5 *Si in triangulo vnus angulus rectus fue-*

rit

rit, duo reliqui alium rectum efficiunt, & quilibet eſt acutus, minor recto.

6 *Anguli omnes cuiuslibet rectilinei æquales ſunt angulis alterius rectilinei totidem lateribus compoſiti.*

7 *Si trianguli angulus æqualis ſit angulo alterius, reliquorum ſummæ etiam erunt æquales, & è converſo.*

DEMONSTRATIO. Fig. 3.

In triangulo ABC, tres anguli d, b, e, æquivalent duobus rectis. Quoniam ducta per verticem FBD. parallela baſi AC, ſunt anguli alterni, *a*, & *d*, æquales, & etiam alterni *c*, & *e*, (2. l. 1,) ergo tres anguli *d, b, e*, æquales ſunt tribus *a, b, c*, ſed *a, b, c*, æquantur duobus rectis cum in eodem puncto B, ſupra rectam FD, ſint conſtituti (1. l. 1,) ergo tres anguli *d, b, e*, duobus etiam rectis æquales erunt (3. P.)

2 *In triangulo ABC, continuato latere AC, in G, angulus externus BCG, æqualis eſt duobus internis oppoſitis* b, & d. Quoniam externus BCG, cum interno *e*, æquatur duobus rectis (1, l, 1,) ſed etiam interni oppoſiti *d, b*,

cum

cum *e*, æquantur duobus rectis (1. N.) ergo ablato vtrinque angulo *e*, communi remanebit externus BCG, æqualis duobus internis oppoſitis *b*, & *d*, (4. P.)

3 *Sit rectilineum ACDEF, quinque laterum, quorum duplus numerus erit* 10. *ablatis* 4. *remanebũt* 6. *dico omnes rectilinei angulos æquales eſſe* 6, *angulis rectis*: & *ſic in alijs*, &c. Sumatur enim intra figuram quodvis punctum B, & ductis BA, BC, BD, BE, BF, fient tot triangula quot latera: ſed quodlibet triangulum habet angulos duobus rectis æquales (1. N.) ergo omnes triangulorum anguli continebit bis tot angulos rectos quot latera: ſed anguli in puncto B, facti æquales ſunt quatuor rectis (1. l. 1.) ergo illis ablatis, quia non ſunt anguli figuræ, remanebunt bis tot recti, quot latera, minus 4. ſcilicet ablatis 4. ex 10. remanebunt 6. &c.

4 *In quolibet rectilineo ACDEF, continuatis lateribus omnes anguli externi æquivalent quatuor rectis*. Quoniam externus DCG, cum ſuo interno DCA, efficit duos rectos (1. l. 1.) & ſic de reliquis externis cum ſuis internis: ergo omnes externi cum ſuis internis ſunt

bis tot recti, quot latera figuræ; ſed interni ſunt bis tot recti, quot latera, minus 4. ergo externi illos 4. rectos efficiunt.

Conſectaria adeò ſunt perſpicua, vt nulla indigeant explicatione.

PROPOSITIO IV.

De Triangulis omninò æqualibus.

pp. 8. 1 *Si tria latera vnius trianguli ſingillatim æqualia ſint tribus lateribus alterius trianguli, reliqua omnia erunt æqualia.*

pp. 4 2. *Et etiam ſi duo latera ſingillatim æqualia duobus alterius comprehendant æquales angulos; reliqua erunt æqualia.*

pp. 26 3. *Si duo anguli, & vnum latus æqualia ~~correſpondeant~~* Sint *angulis, & lateri alterius trianguli, omnia erunt æqualia.*

Schol. 4. 4. *Si duo latera æqualia ſint duobus alterius, & angulus vni oppoſitus æqualis ſit, & alter oppoſitus ſit eiuſdem ſpeciei in vtroque triangulo, reliqua erunt æqualia.*

DEMONSTRATIO. Fig. 4.

1. *In triangulis ABC, ſint æqualia latera AB, AD, tum BC, DC, & AC, commune: dico reliqua omnia eſſe æqualia, ſcilicèt omnes angulos*

 ſin-

ſingillatim eſſe æquales. Quoniam ſi triangulum ABC, convertatur ſupra ADC, cum rectæ CB, & AB, ſint radij circulorum BFD, BGD, coniungi non poterunt niſi in puncto D, vbi ſecantur circuli: ergo totum triangulum ABC congruet triangulo ADC, & erunt æquales anguli B, & D, tum CAB, & CAD, tum ACB, & ACD. ex congruentia (21. B.)

2 *In triangulis ABC, ADC, æqualia ſunt latera AB, AD, tum AC, AC; & anguli compreheñſi BAC, DAC, dico reliqua omnia correſpondere æqualia*. Quoniam ſi convertatur triangulum ABC, ſupra ADE, congruet angulus CAB, ipſi CAD, & recta AB, ipſi AD, cum ſint æquales (1. P.) ergo cum punctum B, cadat ſupra D, cadet recta CB, ſupra CD, ergo congruent triangula ABC, ADC, & anguli DB, erunt æquales: tum BCA, DCA, & etiã latera CB, CD, &c.

3 *In triangulis BAC, DAC, æquales ſint anguli BAC, CAD, tum BCA, DCA, & latera AC, AC, ab angulis comprehenſa: dico reliqua omnia eſſe æqualia*. Deſcriptis enim ex A, & C, arcubus BFD, BGD, æquales erunt BG, GD,

cum ſint æqualium angulorum menſura; tum etiam FB, DF, (10. P.) ergo ſi triangulum ABC, convertatur ſupra ADC, congruent arcus BF, FD, tum BG, GD, (1. P.) ergo cum punctum B, cadit in D, congruet triangulum ABC, ipſi ADC, & erunt æqualia latera AB, AD, tum CB, CD, & anguli B. D, &c.

Si verò ſint latera AC, AC, æqualia, & anguli BAC, & DAC, tum B, & D, reliqua omnia erũt etiam æqualia. Quoniam angulus tertius BCA, æqualis erit DCA, ex *conſect.* (3. l. 1.) ergo demonſtrabitur, vt antea.

4 *In triangulis ABC, ADC, æqualia ſunt latera AB, AD, tum AC, AC, & angulus BCA, oppoſitus lateri AB, æqualis angulo DCA, qui opponitur æquali lateri AD, & angulus B, oppoſitus lateri AC. eſt eiuſdẽ ſpeciei cũ angulo D, qui opponitur æquali lateri AC. Dico reliqua omnia eſſe æqualia.*

Si ex A, deſcribatur circulus BDE, & ex C, arcus BFD, & continuetur latus CD, in E, ſi triangulum ABC, convertatur ſupra ADC. congruet angulus ACB, cum ACD, æquali (1. P.) ergo punctum B, cadet, vel in D, vel in E, cum AD, & AE, ſint æquales ipſi AB. Si ergo DE, bifariam dividatur in H, in triangulis

AHD,

AHD, AHE, æqualia ſunt latera AD, AE, & DH, EH, & AH, commune: ergo anguli AHE, & AHD, ſunt æquales recti, & AEH, ADH, ſunt æquales acuti, (1. N.) ergo angulus ADC, erit obtuſus: ergo cum ABC, ſit etiam obtuſus, nempe eiuſdem ſpeciei, cadet punctum B, ſupra D, & non ſupra E, ergo cum triangula ABC, ADC, congruant, omnia erũt æqualia. Eadem eſt demonſtratio in omnibus, licèt latus AC, commune non ſit, quoniam æqualia latera congruere poſſunt, & idẽ efformare latus.

PROPOSITIO V.

De trianguli partibus.

1 *In triangnlo Iſóſcele latera æqualia æqualibus opponuntur angulis.*

2 *Æquales anguli lateribus æqualibus opponuntur.*

3 *In quolibet triangulo maius latus opponitur maiori angulo, & maior angulus maiori lateri.*

4 *Duo quælibet latera ſunt reliquo maiora.*

CONSECTARIA.

Conſect. 6 pp. 5 *Triangulum æquilaterum eſt æquiangulum, & è converſo.*

6 *In triangulo Iſoſcele recta, quæ bifariam ſecat baſim, etiam angulum: & ſi angulum, etiam baſim, & ſemper eſt perpendicularis, & è converſo.*

7 *Si perpendiculum bifariam ſecet trianguli baſim, angulum etiam æqualiter ſecat, quod ſi angulum etiam baſim: recta verò, quæ ſecat æqualiter baſim, & angulum eſt perpendicularis, ſemperque triangulum erit Iſoſceles.*

8 *Si binæ rectæ æquales cadant ex vno puncto ſupra aliam rectam, ambæ recedunt æqualiter à perpendiculo, atque efficiunt cum eo æquales angulos, & è converſo.*

9 *Perpendicularis eſt breviſsima linea, quæ ab vno puncto poteſt cadere ſupra aliam.*

DEMONSTRATIO. Fig. 5.

1 *In △ ABC. æqualia ſint latera AB, AC, dico etiam angulos oppoſitos c, & b, eſſe æquales.* Recta A*e*, bifariam ſecet angulum A, ergo quoniam latera BA, A*e*, ſunt æqualia his CA, A*e*, & comprehendunt æquales angulos ſcilicet BA*e*, CA*e*, omnia erunt æqualia (4. l. 1.) id

id eſt anguli *b*, & *c*, tum ſegmenta *be*, *oc*, tum anguli *e*, *o*, ergo ſunt recti, atque adeò Ao, perpendicularis (1.1.P.) Hinc oriuntur conſectaria 3um. 6um. 7um. 8um.

2. *In* △ *ABC, anguli* b, *&* c, *ſint æquales: dico etiam latera oppoſita AB. AC. eſſe æqualia.* Dividat enim Ae, bifariam angulum A, vt ſint æquales anguli BAe, CAe, latera verò Ae, commune: ergo totum triangulum AeB, æquale eſt huic AeC (4, l. 1.) ergo AB, AC, ſunt latera æqualia oppoſita æqualibus angulis *b*, & *c*.

3. *In* △ *ADC, ſit latus AD, maius quam AC, etiam angulus C, oppoſitus AD, maior erit, quam D, oppoſitus AC.* Si enim ſumatur AB æqualis AC; erunt æquales anguli *b*, *c*, (1. N.) ſed *b*, eſt externus trianguli CDB, ergo *b*, eſt maior quam D. (15, l. 1.) ergo *c*, qui æqualis eſt *b*, etiam eſt maior quam D, ſed ACD, adhuc eſt maior quam *c*, ergo etiam erit maior quam D. (4. P.)

In △ *ADC, ſi angulus ACD, maior ſit quam D, etiam latus AD, oppoſitum C, maius erit quam latus AC, oppoſitum D.* Quoniam ſi latera AD, AC, eſſent æqualia, etiam anguli C, D, æquales

les eſſent (1.N.) Si AC, eſſet maius quā AD. etiam angulus D, eſſet maior quam C, quæ omnia ſunt contra hypotheſim: ergo eſt AD, maius quam AC.

3 *In quolibet triangulo ACD. duo quælibet latera AC. CD. ſimul ſumpta ſunt maiora reliquo AD.* Quoniam AD, cum ſit linea recta eſt breviſsima diſtantia inter puncta A, & D, (6. P.) ergo eſt AD, minor quam AC, & CD.

Conſectarium 5.6.7.& 8. oriuntur ex *num.* 1. *Conſect.* 9. Ex puncto A, ſit A*e*, perpendicularis ipſi BC, dico A*e*, eſſe breviſsimam lineā, quæ duci poteſt ex A, in rectam BC, ducatur enim quælibet alia AB. Cum ergo in triangulo *AeB*, angulus *e*. Sit rectus, erit angulus *b*, acutus minor recto (3.l.1.) ergo AB, quæ opponitur maiori angulo *e*, maior erit, quam A*e*, (3.N.) & erit vnica quia nullus angulus *b*, poteſt eſſe rectus (3.l.1.)

PROPOSITIO VI.

De Triangulorum inæqualitate.

Cor. Pr. 19. 1 *Si duo triangula habeant duo latera æqualia, quod habet maiorem angulum, habet maiorem baſim.*

2 *Et*

2 *Et quod maiorem habet baſim, maiorem habet angulum.*

3 *Si duo triangula habeant eamdem, vel æqualem baſim, qui ſupra illam habuerit vnum angulum minorem, alterumque, vel æqualem, vel minorem, habebit minora latera.*

4 *Latera tamen comprehendent maiorem angulum.*

5 *Si autem ex quovis puncto intra triangulum ducantur lineæ ad baſim, idem prorſus erit.*

DEMONSTRATIO. Fig. 6.

In triangulis BAD, BAC, eſt BA, commune latus aut æquale: inſuper æqualia ſunt latera AD. AC. ſed angulus BAC, maior quam BAD. dico baſim BC. maiorem eſſe quam BD. Quoniam in triangulo AEC, duo latera AE, EC, maiora ſunt quam AC, (5 l. 1.) ſed AC, æquatur AD, ergo AEC, maiora ſunt quam AED. ergo ſi ex inæqualibus AEC, AED, auferatur commune AE, remanebit EC, maius quam ED, & ſi inæqualibus CE, DE, addatur commune EB, erunt CEB, maiora quam DEB, (4. P.) ſed duo latera DEB, maiora ſunt quam

DB,(5.l.1.)ergo CEB, vel baſis CB maior eſt quam DB,(4.P.)

2 *Intriangulis BAC,BAD, ſit BA, commune, & DA,CA,latera æqualia, & baſis CB, maior quam DB, dico oppoſitum angulum CAB, maiorem eſſe quam DAB.* Si enim anguli forent æquales æqualibus cõprehẽſi lateribus, ſcilicet BA, AC, ipſis BA, AD, etiam baſes BC, BD, æquales eſſent(4.l.1.) quod eſt contra hypotheſim: ergo anguli BAC, BAD, inæquales ſunt: ſed maior angulus baſim habet maiorem(1.N.) ergo cum BC, baſis maior ſupponatur quam BD, erit angulus ipſi oppoſitus BAC, maior quam BAD.

3 *Triangula BAC. BAE, baſim habent AB, communem, vel æqualem, & angulum ABE. ſimiliter: angulus autem BAE, minor ſit quam BAC, dico latera AE, EB. ſimul ſumpta minora eſſe quam AC. CB.* Quoniam in △ ACE, duo latera AC, CE, maiora ſunt reliquo AE,(5.l.1.) addito ergo communi EB, erunt AC, CE, EB. maiora quam AE, EB.

Si angulus ABF, fuerit etiam minor quam ABC, in △ AEB, etiam latera AF, EB, minora erunt, quam AC, CB. Quoniam continuato

to AF, in E, in △ FEB. duo latera FE, FB, maiora erunt reliquo FB. (5. l. 1.) ergo addito communi FA, erunt BE, EF, FA, maiora quã BF, FA, (4. P.) ſed BC, CA. demonſtrata ſunt maiora quam BEFA, ergo BCA, multò maiora erunt quam BF, FA, (4. P.)

4 *In vtroque caſu latera minora maiorem comprehendent angulum.* Quoniam in △ ACB, 3, anguli æquantur 2, rectis, & etiam in △ ABE. ergo cum ſumma angulorum ABE, EAB, minor ſit quam ABC, CAB, reſiduus AEB, maior erit quam ACB, (4. P.) idem eſt de angulo AFB.

5 *Si intra △ ACB. ſumatur quodlibet punctum E, vel F, & ducantur EB, EA, vel FB. FA.* idem omnino erit, vt ex figura liquet.

PROPOSITIO VII.

De Parallelogrammo in ſeipſo.

1 *Latera oppoſita parallelogrammi ſunt æqualia, & etiam anguli oppoſiti.*

2 *Diametri ſecant parallelogrammum, & ſecantur inuicem æqualiter.*

3 *Idem eſt de qualibet recta per centrum, vel diametrorum ſectionem transeunte.*

4 *Quadrilaterum erit parallelogrammum, ſi habeat bina latera parallela æqualia.*

5 *Item ſi latera oppoſita ſint æqualia.*

6 *Item ſi anguli oppoſiti ſint æquales.*

DEMONSTRATIO. Fig. 7.

1 *Sit ABCD. Parallelogrammum: dico latera oppoſita DA, CB. eſſe æqualia, & etiam DC, AB, tum anguli D. & B. tum A, & C.* Ducta enim diametro AC. cum AB, DC, ſint parallelæ, inde anguli alterni *f*, *a*, ſunt æquales (2. l. 1.) itemque *e*, *o*, quoniam AD, BC, ſunt parallelæ: ergo cum AC, latus ſit commune illis duobus triangulis ABC, ADC. Itemque anguli ſuper baſim *a*, *e*, æquales illis *f*, *o*, erunt æqualia (4. l. 1.) ſcilicet AB. huic DC, itemque CB, huic DA, deinde angulus ABC, huic CDA, iamque adeò angulus A, qui eſt *a*, *o*, hiſce *f*, *e*, ergò latera atque anguli oppoſiti ſunt æquales.

2 *Diametri AC. DB. ſecant parallelogrammum biſariam.* Quoniam triangulum ADC æquale demonſtratum eſt ipſi ABC, & ſimiliter oſtendentur △ DCB. æquale △ DAB, ergo, &c.

Et diametri biſariam ſecantur invicem. Quoniam

niam in △ DGC, & in △ AGB. Latera DC. AB, ſunt æqualia (1. N.) & anguli alterni *f*, & *a*, tum *g*, & *b*. ſunt æquales: ergo reliqua omnia erunt æqualia (4. l. 1.) ſcilicet DG, & GB. tum CG. & GA, ergo diametri AC, & DB; ſecantur bifariam.

3 *Quævis alia recta EF. tranſeat per centrum, vel diametrorum ſectionem G, dico ſecari bifariam, & etiam parallelogrammum.* In triangulis EGA, FGC, æqualia ſunt latera AG, GC, (2. N.) & correſpondent æquales anguli *e*, & *o*, tum *b*, & *d*, (2. l. 1.) ergo reliqua omnia correſpondent æqualia ſcilicet EG, ipſi GF. (4. l. 1.) & totus triangulus AGE, ipſi CGF. ergo cum △ ADC, ſit medium parallelogrammum, ſi auferatur illi △ AEG. & ſubſtituatur æquale △ GCF, erit trapetium EDCF. æquale △ ADC, hoc eſt dimidio parallelogrammi, &c.

4 *Quadrilaterum ABCD, ſi oppoſita latera ſint parallela, & æqualia, erit parallelogrammũ.* Ducta enim diametro AC, fiunt triangula ACD, & CAB, quorum latera DC, AB, ſupponuntur æqualia; & AC, eſt commune, & anguli comprehenſi *f*, & *a*, ſunt æquales quia

ſunt

ſunt parallelarum alterni (2.l. 1.) ergo reliqua omnia erunt æqualia, ſcilicet anguli alterni *o.* & *e*, (4.l. 1.) ergo D A, & C B, erunt parallelæ (2.l. 1.) atque adeo A B C D, erit parallelogrammum.

5 *Quadrilaterum ABCD, ſi habeat oppoſita latera AB, DC, æqualia, tum AD, BC, erit parallelogrammum.* Ducta enim AC. in triangulis ADC. ABC. æqualia ſunt latera AD, BC, tum AB, DC, ex hypotheſi, & latus AC, commune: ergo reliqua omnia ſunt æqualia (4.l. 1.) ergo cum anguli alterni *o*, & *e*, ſint æquales erunt CB, DA, parallelæ (2. l, 1.) & etiam DC, AB, quia alterni *f*, & *a*, ſunt æquales: ergo ABCD, eſt parallelogrammum.

6 *Quadrilaterum ABCD, ſi habeat oppoſitos angulos A, & C, æquales: tum B, & D, erit parallelogrammum.* Quoniam 4. anguli A. B. C. D. æquivalent 4. rectis (3. l. 1.) ſed B, & C, æquales ſunt duobus D, & A, cum ſupponatur B, æqualis D, & C, æqualis A, ergo B, & C, ſunt dimidium 4. rectorum: ergo æquales ſunt 2. rectis: ergo cum anguli interni ABC, DCB, æquivaleant 2. rectis ſunt DC, & AB. parallelæ (2. l. 1.) Similiter quoniam

D,

D, & C, æquales ſunt C, & B, ſcilicet 2, rectis erũt D A, & C B, parallelæ (2. l, 1.) atque adeò A B C D, parallelogrammum.

PROPOSITIO VIII.

De triangulis, & Parallelogrammis interſe.

1 *Triangula, & parallelogramma æquè alta, vel ſunt, vel conſtitui poſſunt inter parallelas, & è converſo.*

2 *Triangulum eſt dimidium parallelogrãmi.*

3 *Parallelogramma quæ habent eandem, vel æqualem baſin, & altitudinem ſunt æqualia.*

4 *Parallelogramma æqualia, ſi habeant æqualem baſim, habebunt etiam altitudinẽ æqualem, & è converſo.*

5 *Si parallelogramma æqualem habeant baſim quod maiorem habet altitudinem, maius eſt; & quod duplam, duplum, &c. & è converſo.*

6 *Idem eſt de triangulis interſe. Quod ſi triangulum baſim habet æqualem, & altitudinem*

nem parallelogrammi duplam, vel è converſo, erit parallelogrammo æquale.

DEMONSTRATIO. Fig. 8.

1 *Sint parallelogramma AD. & BC. æquè alta ſcilicet eorum altitudines CO. FH. æquales ſint: dico illa, vel eſſe, vel conſtitui poſſe inter parallelas.* Cum enim altitudines menſurentur perpendiculis CO, FH, ſi perpendicula ſint æqualia erunt diſtantiæ CO, FH. æquales; & rectæ CT, OH, æqui diſtantes, & parallelæ. (13. P.) ergo parallelogramma æquè alta AF, BC, ſi baſes habeant in recta OH, terminabitur altitudo in parallelam CF. Si autem baſes non habeant ſupra rectam OH. conſtitui poſſunt ſupra ipſam, atque adeò; & inter parallelas.

E converſo. Si figuræ ſint inter parallelas, altitudinem habent æqualem, cum parallelæ OH, CF, ſemper habeant æqualem diſtantiam, & æqualia perpendicula CO, FH?

2 *Sit triangulum Z. dico eſſe dimidium parallelogrammi.* Si enim ducatur AC, ipſi BD, parallela, & DC, ipſi BA, erit BC, parallelogrammum, & cum AD, ſit diameter illud bifariam ſecat (7. l. 1.) ergo △ Z. vel ABD,

eſt dimidium parallelogrammi. Similiter ſi BF. fiat parallela ipſi AD. erit △ Z. dimidium AF.

3 *Sint parallelogramma AF. BC. in caſu 1.2.3. ſupra eandem, vel æqualem baſim AB. & ſint æquè alta vel inter parallelas: dico eſſe æqualia.* Quoniã in parallelogrammo BC. latera oppoſita AC. BD. æqualia ſunt, & in parallelogrammo AF. æqualia etiam latera AE. BF. (7.l.1.) & cum CA. DB. ſint parallelæ, recta HA. ingrediẽs in eas, æquales efficit angulos HBD. HAC. (13. P.) & ſimiliter HBF. HAE. cum FB. & EA. ſint parallelæ: ergo ſi ex æqualibus HBD. HAC. auferantur æquales HBF. HAE. remanebunt æquales FBD. EAC. (4. P.) ergo cum triangula FBD. EAC. habeant æquales angulos FBD. EAC. lateribus æqualibus FB. EA. tum DB. CA. erunt triangula omnino æqualia (4.l.1.) ergo in caſu 1. & 2. ſi æqualibus triangulis CAE. DBF. addatur commune ſpatium EABD. reſultabit parallelogrammũ AF. æquale ipſi BC. (4. P.) Et in caſu 3. ſi triangulis æqualibus CAE. DBF. auferatur commune DGE. & adda-

tur commune ABG. reſultabit parallelogrammum AF. æquale ipſi BC. *Idem omnino eſt*, ſi baſis eadem non ſit, dummodo ſit æqualis, quia æqualis baſis alteri ſuperpoſita ipſi congruet, & erit eadem.

4 *Si parallelogramma BC. & AF. æqualia ſint ſupra æqualem, vel eandem baſim AB, erunt æque alta; & è converſo.* Continuatá enim parallela CD. ſecans parallelas AE. BF. efficiet parallelogrammum AF. æqualê ipſi BC. (3. N.) ergo CD. continuata tranſibit per E. & F. atque erit ipſamet EF. ergo BC. & AF. ſunt inter parallelas. Converſa ſimiliter demonſtrabitur ſi altitudo ſumatur vt baſis, & baſis vt altitudo.

5 *Cum parallelogramma BC. & AF. ſupra æqualem vel eandem baſim AB. & inter parallelas AB. CF. æqualia ſint* (3. N.) ſi aliud haberet maiorem altitudinem terminaretur ſupra EF. & eſſet maius quam AF. vel BC. ſi autem CN. duplam habeat baſim quam CB. erit CN. duplum ipſius CB. Quoniam ſi baſis CM. bifariam dividatur in A. erunt parallelogramma ſupra CA. & AM. æqualia ergo totum ſupra CM. duplum illius, quod ſu-

ſupra CA. Idemque eſt de altitudine dupla vel tripla, &c. ſi conſideretur vt baſis.

6 *Quæ de parallelogrammis* demonſtrata ſunt *num.* 1. 3. 4. & 5. de triangulis etiam intelliguntur, cum triangulum ſit dimidium parallelogrammi (2. N.) vnde ſi triangulum habeat cum parallelogrammo æqualem baſim & altitudinem erit illius dimidium. Si autem baſim habeat duplam erit ipſi æquale quia duplum dimidij toti compoſito æquatur, idemque eſt de triangulo habente, duplam parallelogrammi altitudinem.

Propoſitio 47. & 48. *Euclidis.*

Locum habent in *libro* 2. *propoſ.* 4. cum ſint de rectarum potentijs.

Libri I. Finis.

LIBER II.

DE POTENTIA LINEARVM RECTARVM.

LInearum Potentia explicata fuit proœmiali 15. Omnia, quæ in hoc libro de Quadrato, & Rectangulo oblongo demonſtrat Euclides, conueniunt etiam Rhombo, & Rhomboidi ſub æquali angulo, & etiam triangulis, quæ ſunt eorum ſemiſſes. Quod ſemel admonuiſſe ſufficiat, ne in ſingulis propoſitionibus ſit inutiliter repetendum.

Propoſitiones libri 2. ſunt quatuor.

Prop. 1. *De rectæ diuiſione in quaslibet duas partes.*

Prop. 2. *De rectæ diviſione in duas partes inæquales.*

Prop. 3. *De rectæ diviſione in duas æquales partes, & duas inæquales.*

Prop. 4. *De potentia laterum in triangulis.*

Ca-

Caracterum ſignificationes, quibus deinceps vtar, hæ ſunt. □ *Quadratum.* ▭ *Rectã-gulum.* + *Plus.* − *Minus.*

PROPOSITIO I.

De rectæ diviſione in quaslibet duas partes.

1 *Rectangulum ex tota & vno ſegmento æquale eſt quadrato eiuſdem ſegmenti, & rectangulo vtriuſque ſegmenti.* pp. 3.

2 *Quadratum totius æquatur duobus quadratis partium, & duobus rectangulis ipſarum.* pp. 4

3 *Quadratum totius æquatur rectangulo ex tota & vno ſegmento, cum quadrato alterius, & rectangulo vtriuſque.* corolla. 4 pp

4 *Quadratum totius cum quadrato vnius ſegmenti æquale eſt duobus rectangulis ex tota, & eodem ſegmento, cum quadrato alterius ſegmenti.* pp. 7.

6 *Quadratum totius æquale eſt rectangulis ex tota recta, & ex eius partibus.* pp 2.

DEMONSTRATIO. Fig. 1.

1 *Sit recta AB. vtcumque diuiſa in E. dico rectangulum BAE. ex tota BA. & ex ſeg-men-*

*mento AE. æquale eſſe quadrato AE. & rectã-
gulo AEB. vtriuſque ſegmenti.* Si enim angu-
li A. & B. ſint recti, & AF. BG. æquales AE.
erit FB. rectangulum ex BA. & AF. vel AE.
Et ſi FH. ſumatur æqualis AE. erit FE. □ ex
AE. & HB ▭ ex BE. & EH. vel EA. ſed
▭ FB. componitur ex □ AH. & ex ▭ HB.
Ergo eſt ipſis æquale (2. P.) 1

2 *Si recta AB. ſit diuiſa in E. dico* □ *totius
AB. æquale eſſe* □ *AE.* + □ *EB.* + *2.* ▭ *AEB.
ex partibus AE. EB.* Sit □ AD. ex tota AB.
ſumantur AF. BG. CR. æquales ipſi AE. &
ducantur FG. ER. & quia ex æqualibus AB.
AC. ablatæ ſunt æquales AE. AF. remanent
æquales FC. EB. Ergo quia æqualia ſunt op-
poſita parallelogrammorum latera (7. l. 1.)
erunt FC. HR. GD. æquales ipſis EB. HG.
RD. tum AF. EH. BG. ipſis AE. FH. CR.
Vnde □ AH. eſt ex recta AE. & □ HD. ex
recta RD. vel EB. & ▭ HB. ex rectis EB. &
BG. vel AE. & ▭ HC. ex rectis FH. & FC.
vel AE. & EB. ſed □ AD. componitur
ex □ AH. + □ HD. + ▭ HB. + ▭ HC.
Ergo eſt omnibus illis æquale (2. P.) 1

3 *Si recta AB. ſit diuiſa in E. dico* □ *to-*

tius

tius AB. æquale eſſe ▭ *BAE.* + □ *EB.* + ▭ *BEA.* Suppoſita conſtructione, vt in 2.*num.* eſt ▭ AR. ex tota AC. vel AB. & ex ſegmēto AE. & □ HD. eſt rectæ HG. vel EB. & ▭ HB. eſt ex ſegmētis EB. & EH. vel EA. ſed □ AD. componitur ex ▭ AR. + □ RG. + ▭ GE. Ergo eſt ipſis æquale (2. P.)

4 *Si recta AB. ſit diviſa in E. dico* □ *totius AB. cum* □ *ſegmēti AE. æquari* 2 ▭ *BAE. cum* □ *ſegmenti EB.* Quia poſita eadem conſtructione ſi AB. & FG. continuentur vt Bi, & Go. ſint æquales ipſi AE. erit □ Bo. æquale ipſi AH. & ▭ Eo. ipſi ▭ AG. ex tota AB. & ex ſegmēto AF. vel AE. ſed □ AD. + □ Bo. componitur ex ▭ GE. + ▭ Eo. + □ HD. ſegmenti HG. vel EB. Ergo □ AD. + □ Bo. rectæ Bi. vel AE. æquatur 2 ▭ GE. Eo. + □ HD. hoc eſt □ AD. rectæ AB. + □ AH. æquatur 2 ▭ BAE. + □ HD. ſegmenti EB.

5 *Si recta AB. ſit diviſa in E. dico* □ *totius AB. æquale eſſe* ▭ *ABE.* + ▭ *BAE. ex tota, & ſegmentis.* Etenim quadratum rectæ AB. eſt □ AD. vnde rectæ AB. BC. æquales ſunt (34. P.) ſi ergo ER. ſit parallela ipſi AC. erit AR ▭ ex AE. & tota AC. vel AB. & ſimili-

ter

Demonstra p numeros. AB 6 diuiſa in 2, et in EB 4. □ 6 eſt 36 = ▭ tota AB 6 et ex AE eſt 12. □ EB 4, eſt ▭ demū ex 2 et eſt 8. Sed 12 + ... + 8 = 36 ...

ter ED. erit ▭ ex ſegmento EB. & ex tota BD: vel BA: ſed □ AD. componitur ex ▭ AR. + ▭ ED. Ergo eſt ipſis æquale (2.P.) Idem erit ſi recta AB in tres, vel plures partes fuerit diviſa.

PROPOSITIO II.

De diviſione rectæ in duas partes inæquales.

1 *Quadratum totius æquale eſt* 4 *rectangulis partium inæqualium cum quadrato differentiæ ipſarum.*

2 *Quadrata partium inæqualium æquantur* 2 *rectangulis earumdem cum quadrato differentiæ ipſarum.*

3 *Quadrata partium inæqualium ſunt dimidium quadrati totius cum quadrato differentiæ earumdem.*

4 *Quadratum partis maioris æquale eſt quadrato minoris cum rectangulo totius rectæ, & differentiæ partium.*

DEMONSTRATIO. Fig. 2.

Sit recta AB inæqualiter diuiſa in E. dico □ *AB. æquale eſſe* 4 ▭ *AEB.* + □ *differentiæ inter AE. & EB.* Si enim fiant BN. BG.

DM.DL. CK. CO. AF. æquales minori ſegmento AE.erit EN.differentia inter EB. & BN.vel AE. & ▭ EG. erit ex ſegmentis EB.& EH.vel EA.cui æquales ſunt ▭ GL. ▭ LO. ▭ OE. tum □ HZ.eſt rectæ HS,vel differentiæ EN:ſed □ AD. totius rectæ AB: componitur ex ▭ EG. + ▭ GL. + ▭ LO. + ▭ OE. + □ HZ: Ergo eſt ipſis æquale. (2.P.)

2 *Sit recta AB.inæqualiter diviſa in E. dico □ AE. + □ EB. æquari 2 ▭ AEB. + □ differentiæ inter AE. & EB.* Suppoſita conſtructione ex *num.* 1. eſt □ AH. rectæ AE. & □ EM. rectæ EB: cumq; ▭ AS. eſt ex ſegmentis AE. EB. vel AF. AN:& ▭ NM. eſt æquale ▭ AS: ex congruentia: ſed □ AH. + □ EM: componuntur ex ▭ AS. + ▭ NM. + □ HZ: Ergo illa ſunt his æqualia (2.P.)

3 *Sit AB. inæqualiter diviſa in E. dico □ totius AB. cum □ differentiæ inter AE. & EB. dupla eſſe □ AE. + □ EB.* Si enim □ MP. factum ſit æquale ipſi □ HZ. quoniã æqualia ſunt ▭ AN. ▭ NM. ▭ MR. ▭ RF: cum ▭ FN. + ▭ NM. + □ HZ. æqualia

 ſint

ſint □ AH. + □ EM. (2.N.) etiam □ MR. + □ RF. + □ MP. æqualia erunt □ AH. + □ EM: Ergo □ MP. + □ AD. compoſitum ex FN. NM. MR. RF. HZ. bis continent □ AH. + □ EM: & ſunt iſtorum dupla. Hoc ipſum vniuerſaliter demonſtratur de omnibus figuris ſimilibus in *parte* 1. *Geom. Magnæ in Minimis prop.* 1.

4 *Sit AB. inæqualiter diviſa in E. dico □ partis maioris EB. æquale eſſe □ minoris AE. & □ ex tota AB. & differentia inter AE. EB.* Poſita enim conſtructione vt in 1. *num.* eſt □ AZ. æquale □ EM. rectæ EB: & □ EL. eſt ex differentia partium EN. & ex tota ER. vel AC. vel AB: ſed quia □ AH. & □ EZ. communia ſunt □ AZ: ſi pro □ XL. addatur æquale □ XF. erit □ AZ: æquale □ AH. + □ EL. &c.

PROPOSITIO III.

De diviſione rectæ in duas partes æquales, & duas inæquales.

1 *Si recta ſit æqualiter diviſa quadratum totius quadruplum eſt quadrati ex ſemiſſe, & hoc quarta pars illius.*

2 *Si*

2 *Si recta ſit æqualiter, & inæqualiter ſimul diviſa, quadrata inæqualium ſuperant quadrata æqualium duobus quadratis ſegmenti intermedij.*

3 *Et quadratum ſemiſsis æquatur rectangulo inæqualium cum quadrato inter ſegmenti.*

4 *Et quadratum totius rectæ æquale eſt duobus rectangulis inæqualium; & duobus quadratis æqualium, & duobus quadratis inter ſegmenti.*

DEMONSTRATIO. Fig. 3.

1 *Sit recta AB. æqualiter diviſa in E. dico* □ *AD. totius AB. quadruplum eſſe* □ *AX. ſemiſsis AE.* Quoniam ſi ER. TO. bifariam dividant omnia latera □ AD. æqualia erunt quadrata XA. XB. XD. XC. ex congruentia: ſed □ AD. compoſitum ex ipſis, eſt omnibus ſimul æquale (2.P.) Ergo □ AD. quadruplum eſt □ AX: & hoc quarta illius pars. Quod verum etiam eſt de omnibus figuris ſimilibus ex 2.*prop.Partis* 1. Geometriæ Magnæ in Minimis.

2 *Si recta AB. ſit æqualiter diviſa in E.*

& inæqualiter in N: dico □ *AN.* + □ *NB: æqualia eſſe* 2 □ *AE.* + 2 □ *EN.*: Si enim ER. TO. bifariam dividant latera □ AD. & ſumantur BG. DM. DL. CQ. AF. æquales BN: ductis rectis erit AZ. □ rectæ AN: & □ NG. rectæ NB: tum quia ex æqualibus BE. DR. BO. DO. ablatæ ſunt æquales BN. BG. DM. DL: remanent æquales EN. GO. OM. LR. vnde □ HI. & □ XZ. ſunt ex inter ſegmento EN: & □ AX + □ XG. ſunt 2 □ □ rectæ AE: Deinde ▭ CP. æquale eſt ▭ EG: ex congruētia: Ergo addito communi. QE: erit ▭ QE + ▭ EG. æquale □ AX + □ XC: ſed □ AZ + □ NG. æquātur ▭ QE + ▭ EG + □ HI + □ XZ: cum componantur ex ipſis (2. P.) Ergo □ AZ + □ NG. æquantur 2 □ □. AX. XC. + 2 □ □ SX. XZ: Ergo quadrata inæqualium ſuperant quadrata æqualium duobus quadratis SX. XZ. inter ſegmenti EN.

Hoc ipſum demonſtratur de omnibus figuris ſimilibus in 1. *prop. partis* 1. Geom. Mag. in Minimis.

3 *Quadratum EO. ſemiſſis AE. æqua-*

tur ▭ *AS.partium inæqualium AN. NB. cum* □ *SX.inter ſegmenti EN.* Quoniam ▭ AH. æquatur ▭ NO: Ergo addito communi EI: erit □ EO: ſemiſsis EB. æquale ▭ AS: + □ SX. nempè rectangulo inæqualium + □ inter ſegmenti.

4 *Quadratum AD. totius rectæ AB. æquatur* 2 ▭ *AS* + 2 □ *AX* + 2 □ *SX.* Quoniam ▭ NO. æquale eſt AH: addito cõmuni ES. erit AS. æquale HN + NO. & ſimiliter ▭ AS. æquale ▭ OL + ▭ LP. ſed □ AD. componitur ex 2 □ □ AX. XC + 2 □□ SX. XZ + ▭ HN. NO. OL. LP. quæ ſunt 2 ▭ AS: Ergo eſt omnibus illis æquale.

PROPOSITIO IIII.

De Potentia laterum in Triangulis.

1 *In Triangulo rectangulo baſis oppoſita angulo recto æquè poteſt ac latera.* pp.47. lib.1

2 *In Obtuſangulo baſis oppoſita obtuſo plus poteſt quam latera duplici rectangulo ex quovis latere, & eius continuatione vſque in perpendiculum.* pp.12.

3 *In omni Triangulo baſis oppoſita angulo acuto minus poteſt quam latera duplici re-* pp.13.

ctan-

ctangulo ex quovis latere, & ipſius ſegmento inter perpendiculum, & dictum angulum.

4 *Si baſis trianguli æquè poteſt ac latera ſubtendit angulum rectum; ſi plus obtuſum, ſi vero minus acutum.*

DEMONSTRATIO. Fig. 4.

Sit △ ABC. rectangulum dico baſim AC. angulo recto B. oppoſitam æquè poſſe ac latera AB. BC. hoc eſt □ AC. æquale eſſe □ AB + □ *BC.* Cōtinuata BA. in D. ſit AD. æqualis BC: & □ DH: ſit rectæ AB: in quo ſumātur HF. GE. æquales BC. vel DA: & remanebunt æquales AB. CH. FG. ED. (4. P.) & quia etiā anguli B. H. G. D. recti ſunt æquales (14. P.) erunt triangula *e. c. a. g.* omnino æqualia (4. l. 1.) Vnde cum anguli DAE. & DEA: vel BAC. vnum rectū efficiāt (3. l. 1.) erit EAC. rectus, tum ACF. CFE. FEA: Ergo quia AF. omnia latera habet æqualia; & omnes angulos rectos erit □ rectæ AC. Deinde ductæ lateribus parallelæ AN. EL. FR. CM: faciunt △ △ *f. h. b. d.* æqualia ipſis *e. c. a. g.* & inter ſe (7. l. 1.) tum quia GF. DR. æquales ſunt AB. & FH. RB. ipſi BC.

eſt

eſt DL □ rectæ DR.vel AB: & RC □ rectæ RB.vel BC.

Demonſtratio 1. □ DH. ſuperat □ DL + □ RC.in 4 △ *a. b. c. d*: ſed idem □ DH. ſuperat □ AF.in 4 △ *a. c. g. e.* quæ prioribus *a. b. c. d.* ſunt æqualia: Ergo □ AF. rectæ AC: æquale eſt □ DL + □ RC: rectarum AB BC.(3.P.)

Demonſtratio 2. □ AF. æquale eſt 4 △ *b. d. f. h.* + □ ML: ſed □ DL + □ RC. æquantur etiam 4 △ *e. g. f. h.* + □ ML. Ergo quia triangula ſunt æqualia, etiam □ AF. æquale eſt □ DL + □ RC. (3.P.)

Demonſtratio 3. △△ *e. g.* æqualia ſunt △△ *d. h.* Ergo addito communi ſpatio ELQCAE: reſultabit ex vna parte □ AF. æquale □ DL + □ RC. ex altera (4.P.)

2 *Si △ ACR habeat angulum ARC. obtuſum: dico □ AC. æquale eſſe □ AR + □ RC + 2 □ ARB: ex latere AR: & eius continuatione RB. vſque ad perpendiculum CB:* Quoniam angulus B. eſt rectus eſt □ CR. æquale □ CB + □ RB. (1.N.) addito ergo □ RA: erunt □ CR + □ RA. æqualia □ CB + □ BR + □ RA: ſed □ CA. æquale eſt

eſt □ CB + □ BA. (1. N.) & quia recta BA. eſt diviſa in R. eſt □ BA. æquale □ BR + □ RA + 2 ▭ ARB. (1. l. 2.) Ergo □ CA. æquale eſt □ CB + □ BR + □ RA + 2 ▭ ARB. Ergo quia 2 □. CB. BR. ſunt ipſum □ CR. erit □ AC. æquale □ CR + □ RA + 2 ▭ ARB: vnde ſuperat duo □ □ CR. RA. duobus ▭ ▭ ARB. Potuit etiam perpendiculum cadere ex angulo A. in latus CR.

3 *In quovis △ CSA. ſi angulus S. acutus ſit, & cadat perpendiculum CB. in latus SA. dico □ baſis AC. oppoſitæ angulo acuto S. minus eſſe □ CS. + □ SA. duobus rectangulis ASB: ex latere AS. & ſegmento SB.* Quoniam □ AC. æquale tantum eſt □ CB + □ BA. (1. N.) ſed □ CS. æquale eſt □ CB + □ BS. quia anguli in B. ſunt recti (1. N.) & quia recta AS. diviſa eſt in B. eſt □ AS. æquale □ AB + □ BS + 2 ▭ ASB. (1. l. 2.) Ergo □ CS + □ SA. æqualia ſunt □ CB + □ BA + 2 □ BS + 2 ▭ ASB. Ergo □ CS + □ SA. excedunt □ AC. in 2 □ BS + 2 ▭ ASB. ſed □ BS + ▭ ASB. eſt ▭ ASB (1. l. 2.) Ergo □ CS + □ SA. excedunt □ AC. in 2 ▭ ASB.

4 *In △ CBA. ſi baſis AC. æquè poteſt ac*

hic, licet aprimè doctus, erravit ut homo. et oſtenditur demonſtrando in numeris, et infra penam. — + □ BS — (+ n.4. — (+ n.1. — Demonſt. per n. ... cuius ∠ acutus. Latus AS habet ulnas 21, cuius □ eſt 441: latus CA 20 cuius □ 400 latus demum BS 13 □ eius 169: ſi hoc □ extrahatur ex ſumma aliorum duorum 841 reſiduum erit 672 pro duobus ▭ et ½ eius valor cuiuslibet ▭ 336: ſi hic valor ... per latus notum prædicti ▭ ſcilicet per 21 exiet latus ignotum 16

latera CB. BA: dico angulum B. eſſe rectum. Quia ſi angulus B. eſſet obtuſus, baſis AC. plus poſſet quam latera (2.N.) & ſi eſſet acutus poſſet minus (3.N.) Ergo quia baſis AC. neque poteſt plus neque minus, angulus B. non eſt obtuſus, neque acutus: Ergo eſt rectus.

In △ ACR. ſi baſis AC. plus poſſit quam latera CR. RA. dico angulnm ARC. eſſe obtuſum. Quoniam ſi eſſet rectus, baſis AC. æque poſſet ac latera (1.N.) & ſi acutus, poſſet minus (3.N.) Ergo quia neque poteſt æquê, neque minus, non eſt angulus R. rectus, neque acutus. vnde erit obtuſus.

In quovis △ ASC. ſi baſis AC. minus poteſt quam latera CS. SA. dico angulum S. eſſe acutũ. Quoniam ſi eſſet rectus æque poſſet AC. ac CS. & SA. (1.N.) ſi vero obtuſus, plus poſſet AC. quam CS. SA. (2.N.) Ergo quia AC. neque poteſt æquê, neque plus, non eſt angulus S. rectus, neque obtuſus: vnde acutus erit.

= Quod 16 erit pars lateris ab ∠ acuto S usque ad perpendiculum et quod deficit de 21, scilicet 5. erit residuum lateris AS à perpendiculo usque finem lateris: quae demonstratio est ut correpta iacet non aliter, ut potest probari per numeros

Ad extrahendum valorem perpendiculi fac □ partis BS, scilicet 5. quod □ est 25 deme hoc □ ex □ lateris CS 13 quod □ est 169, et residuum erit 144. cuius radix quadrata ~~erit~~ 12 erit valor perpendiculi CB. Hoc demonstratur per 47 [illegible]

LIBER III.
DE CIRCVLO.

IN hoc tertio libro Euclides egit de Circulo, eiuſque proprietatibus, & licet aliqua hic tractaverit, quæ ad proportionem magis ſpectabant, ea tamen in ſexto libro proprium ſibi vendicant locum. Quam obrē propoſitiones 35. 36. & 37. Euclidis illuc aman davimus, vbi facilius demonſtrantur.

Hic Liber 3. continet 7. propoſitiones.

Prop. 1. *De rectis ex puncto in peripheriam.*
Prop. 2. *De chordis arcubus, & ſegmentis.*
Prop. 3. *De Angulis in Circulo.*
Prop. 4. *De Circulis concentricis.*
Prop. 5. *De Circulis ſe interſecantibus.*
Prop. 6. *De Circulis ſe tangentibus.*
Prop. 7. *De recta Circulum Tangente.*

PRO-

PROPOSITIO I.

De rectis ex puncto in Peripheriam.

1 *Rectarum, quæ ex puncto non centro du-* PP 7 Pars
cuntur in peripheriam concavam, maxima eſt, quæ tranſit per centrum, & proximior ipſi maior eſt remotiore.

2 *Duæ tantum oppoſitæ ſunt æquales, vnde ſi ex puncto tres rectæ in peripheriam ſint æquales illud erit centrum.* Pars.2

3 *Rectarum ex puncto extra Circulum in* PP. 8 Pars.2
peripheriam convexam minima eſt, quæ continuata per centrum tranſit, & ei proximior minor eſt remotiore.

4 *Duæ tantum oppoſitæ ſunt æquales.* Pars.3.

DEMONSTRATIO. Fig. 1.

Sit Circulus EFH. & intra, vel extra ipſum ſumatur quodlibet punctum A. quod non ſit centrum O: & ex A. ducantur rectæ AOG. AF. AE. AH. in peripheriam convexam. Dico maximam eſſe AG. quæ tranſit per centrum O. Et AF. quæ proximior eſt ipſi AG. maiorem eſſe quam AG. Si enim ducantur OF. OE. erunt radij OF. OG. æquales: Ergo addita com-

muni AO. erunt AOF. AOG. æquales (4. P.) ſed in △ AOF. latera AO. OF. maiora ſunt AF. (5. l. 1.) Ergo etiam AOG. maior eſt AF: & AOG. omnium maxima. Deinde quia in △△ AOF. AOE. æqualia ſunt latera OF. OE: & AO. commune, quoniam angulus AOF. maior eſt AOE: totum ſua parte (2. P.) erit baſis AF. Maior AE (6. l. 1) Ergo quæ minus recedit à centro, vel quæ ſecat minorem arcum GF. maior eſt.

2 *Si AF. AH. æqualiter recedunt à centro, vel ſecant æquales arcus GF. GH: dico eſſe æquales, & nullam aliam poſſe eſſe ipſis æqualē.* Quoniam ſi arcus GF. GH. ſunt æquales, etiam anguli GOF. GOH. (10. P.) Ergo etiam anguli AOF. AOH. ſunt æquales (1. l. 1.) Ergo quia in △△ AOF. AOH. æqualia ſunt latera OF. OH. & AO. commune, & anguli comprehenſi AOF. AOH. æquales, erunt etiam baſes AF. AH. æquales (4. l. 1.) Et nulla alia præter AH. poteſt eſſe æqualis ipſi AF. quia ſolum punctum H. tantum diſtat à G. quantum F. à G: Vnde ſi ex eodem puncto tres rectæ æquales ſint, illud erit centrum.

3 *Sit punctum A.extra Circulum: & ex A.ducantur AL. AN, AP. AM. in circumferentiam convexam: Dico AL, quæ continuata tranſit per centrum O. eſſe omnium minimam, & AN. eſſe minorem AP.* Quia in △ ONA. latera AN. NO. maiora ſunt quam AO. (5.l.1.) Ergo ablatis æqualibus radijs ON. OL. remanebit AL. minor qualibet AN: Ergo AL. eſt omnium minima. Tum in △ APO. eſt punctum N. intra ipſum: Ergo AN. NO. minora ſunt quam AP. PO (6.l.1.) Ergo ablatis æqualibus radijs ON. OP. remanebit AN. minor qualibet remotiore AP.

4 *Si AM. AN. æqualiter diſtent ab AL: vel ſi arcus LN. LM. æquales ſint, erũt AM. AN. æquales, & nulla alia præter AN. poterit duci æqualis ipſi AM.* Quia cum LM. LN. ſint æquales arcus, erunt æquales anguli MOA. NOA: & latera OM. ON. æqualia, & AO. commune: Ergo reliqua erunt æqualia, AM. AN. (4.l.1.) & quia ſolum punctum N. æqualiter diſtat ab L. nulla alia præter AN. poteſt eſſe æqualis ipſi AM.

PRO-

PROPOSITIO II.

De chordis, arcubus, & ſegmentis.

1 *Chorda tota intra Circulum cadit.*

2 *Diameter perpendicularis alicui chordæ, ipſam, arcum, & ſegmentum bifariam ſecat, & è converſo.*

3 *Diametri tantum ſe mutuo biſecant.*

4 *Rectæ à centro æquè diſtantes æquales ſunt, æquales ſecant arcus, & ſegmenta, & è converſo.*

5 *Proximior centro maior eſt, maiorem ſecat arcum, & ſegmentum. & è converſo.*

6 *Quod de vno Circulo, dicitur de æqualibus.*

DEMONSTRATIO. Fig. 2.

1 *In Circulo CNM. ſit chorda NM. dico totam intra Circulum cadere.* Si enim ſumatur in MN. quodlibet punctum Z. & ducatur BZE. tum BN. BM. in iſoſcele NBM. æquales erunt anguli N. M (5. l. 1.) ſed in △ BMZ. externus angulus BZN. maior eſt interno oppoſito M. (13. l. 1.) Ergo & maior quam N. Ergo recta BN. hoc eſt BE. maior eſt

eſt quam BZ. (5.l.1.) Ergo cum punctum E. ſit in circumferentia, erit quodlibet punctum Z. intra circulum: Ergo & tota recta NM. cadet intra circulum.

2 *Sit radius BS. vel diameter CBS. perpendicularis chordæ NM. dico NM. & arcũ, & ſegmentum NSM. biſariam ſecari in O. S. & è conuerſo.* Quia ductis radijs æqualibus BM. BN. erit △ NBM. Iſoſceles: Ergo perpendicularis BOS. biſariam ſecat baſim, vel Chordam MN. in O: & angulum NBM. (5.l.1.) Ergo cum anguli NBS. SBM. ſint æquales, eorum menſuræ nempe arcus NS. SM. æquales erunt: & Sectores NBS. SBM: ex congruentia: Ergo ablatis æqualibus △△ NOB. BOM: æquales erunt ſegmenti partes NOS. SOM.

E conuerſo. Si BS. biſecat chordam NM. vel arcum NSM. vel angulum NBM: in △ Iſoſcele NBM. erit BO. perpendicularis baſi NM. & ſi SO. ſit perpendicularis, & biſecat NM, tranſibit per cẽtrum B. verticem △ NBM. (5.l.1.)

3 *Diametri HE. CS. in centro ſe mutuo biſecant*, quia radij omnes ſunt æquales: &

nul-

nullæ rectæ extra centrum ſe mutuo biſecant: Quia ſi NM. ſit biſecta in O. erit angulus BOM. rectus (2.N.) Ergo BOP. vel BOF. non erit rectus: ſed ſi FP. eſſet bifariam ſecta, eſſet angulus BOP. rectus (2.N.) Ergo nequit eſſe biſecta. Vnde ſi duæ rectæ ſe biſecant erunt diametri, & interſectio centrum.

Pars Pr. 7. 4 *Si RC. FE. diſtant æqualiter à centro ſunt æquales, & ſecant æquales arcus, & ſegmenta RHC. FSE:* & *è converſo.* Quia perpendicula BD.BG. ſunt diſtātiæ æquales ex *hypoth.* Ergo ſi BG. convertatur ſupra BD. congruent: ſed etiam congruent anguli recti æquales G.& D. Ergo, & recta FE. & arcus FSE. congruet cum RC. & RHC. Ergo omnia ſunt æqualia (1.P.)

E converſo. Si FE. & RC. æquales ſint, quoniam radij BC.BR.BF.BE. ſunt æquales, congruet △ BFE. cum BRC. (4.l.1.) Ergo & perpendiculum BG. congruet cum BD. & arcus FSE. cum BHC. & omnia erunt æqualia.

Corrol. præced. 5 *Si NM. diſtet minus à centro quam RC. vel FE. maior erit, & è converſo.* Si conſideren-

rentur parallelæ NM. & FE: quia NM. proximior eſt centro, erit angulus NBM. maior FBE. totum parte: Ergo quia latera BN. BM. æqualia ſunt ipſis BF. FE: erit baſis NM. maior quam FE (6. l. 1.) & ê contra ſi baſis ſit maior, erit maior angulus NBM, & arcus NSM. quam FSE. vnde NM. cadet ſupra FE. & proximior centro.

5 *Quod de vno Circulo, dicitur etiam de æqualibus.* Quia congruere poſſunt, & eundem Circulum efficere.

PROPOSITIO III.

De angulis in Circulo.

1 *Angulus in circumferentia eſt dimidium anguli in cētro; & dimidium arcus, cui inſiſtit.* pp. 20 lib.

2 *Angulus intra Circulum eſt ſemiſumma, & extra Circulum ſemidifferentia vtriuſque intercepti arcus. Vnde ſi angulus ſit dimidium intercepti arcus, erit in circumferentia.*

3 *Anguli in eodem, vel æqualibus ſegmentis ſunt æquales. Et etiā in ſimilibus, & contra.* pp. 21.

4 *Si quadrilaterum Circulo inſcriptum ſit, anguli oppoſiti æquantur duobus rectis, & è converſo.* pp. 22 l. 3

pp.31. 5 *Angulus in ſemicirculo eſt rectus; in ſegmẽto maiori eſt acutus; & in minori obtuſus; & è converſo.*

DEMONSTRATIO. Fig. 3.

1 *In circumferentia Circuli BCF. ſit angulus BCF. & ducantur ex centro radij OB. OF. dico angulum C. eſſe dimidium anguli BOF. & dimidium oppoſiti arcus cui inſiſtit BGF.* Quoniam ducta diametro COG. eſt △ BOC. Iſoſceles, & anguli BCO. OBC. æquales (5.l.1.) ſed angulus externus BOG. æqualis eſt duobus internis BCO. OBC (3. l.1.) Ergo BCO. erit dimidiũ ipſius BOG: & quia arcus BG. eſt menſura anguli BOG. (10.P.) erit etiam BCO. dimidium arcus BG. Similiter angulus GCF. demonſtrabitur dimidium GOF: vel arcus GF: Ergo & totus angulus BCF. erit dimidium anguli BOF. & arcus BGF.

Eadem ratione angulus ECG. eſt dimidium arcus GFE: vt GCF. dimidium GF: ſed ſi ex arcu GFE. auferatur arcus GF. remanet FE: Ergo ſi ex dimidio GFE: nempe ex GCE: auferatur dimidium GF. nempe

pe GCF: remanebit dimidium FE : nempe angulus FCE: ergo etiam angulus FCE, eſt dimidium arcus FE. cui inſiſtit angulus.

2 *Sit angulus BAF. intra Circulum : continuatis lateribus ad verticem dico angulum BAF. eſſe ſemiſſem vtriuſque arcus BF. CE.* Quoniam ducta BC. in △ BAC. externus angulus BAF. æqualis eſt duobus internis ABC. BCF. (3.l.1.) ſed ABC. vel CBE. eſt dimidium arcus CE: & BCF. eſt dimidium BF. (1.N.) Ergo BAF. eſt dimidium vtriuſque arcus CE. BF. *Sit vero angulus D. extra Circulum ſecans arcus BC. EG. dico angulum D. eſſe ſemidifferentiam arcuum BC. EG: vel eſſe dimidium BC. minus dimidio EG.* Ducta enim EB. in △ BDE. externus angulus BEC. æqualis eſt internis DBE. EDB. (3.l.1.) Ergo EDB. eſt differentia inter BEC. & EBD: ſed BEC. eſt dimidium arcus BC. & EBG. eſt dimidium arcus EG. (1.N.) Ergo BDC. erit ſemiſsis differentiæ inter BC. & GE: vel dimidium BC. minus dimidio EG.

Vnde ſi angulus F. ſit dimidium intercepti arcus BCE. erit F. in circumferentia, quia ſi eſſet intra Circulum eſſet plus dimidio ar-

cus BCE. ſi extra minus, &c.

3 *In ſegmento BCEF. ſint quilibet anguli BCF. BEF. &c. Dico omnes eſſe æquales; idēque eſt de ſegmentis ſimilibus, & è converſo.* Quia angulus BCF. eſt dimidium oppoſiti arcus BF. tum BEF. eſt dimidiū BF. (1. N.) Ergo ſunt æquales: Idemque eſt in ſegmentis æqualibus Circulorum æqualium, & in ſegmentis ſimilibus, licet inæqualium Circulorum; quia ſegmenta ſimilia ſimiles habent arcus, æquali ſcilicet graduum numero (9. P.) Ergo anguli æquales erunt.

E converſo. Si anguli ſint in circumferentia æquales: oppoſiti arcus qui ſunt eorum dupli æquali graduum numero conſtabunt (1. N.) Ergo erunt ſimiles in Circulis inæqualibus, & æquales in Circulis æqualibus (9. P.)

4 *Quadrilaterum BCEF. Circulo inſcriptum ſit: dico oppoſitos angulos B. E: tum C. F. æquales eſſe duobus rectis, & è converſo.* Quoniam angulus CBF. eſt dimidium oppoſiti arcus CEF: & angulus CEF. eſt dimidium oppoſiti arcus CBF. (1. N.) ſed duo arcus CEF. FBC. ſunt integer Circulus: Ergo duo an-

anguli CBF.CEF. ſunt dimidium Circuli, nempe 180.*grad.*vel æquales 2.rectis. Idē-que eſt de angulis C.F. *E converſo. Si anguli C. F. ſint æquales duobus rectis erit quadrilaterum BFEC. in Circulo.* Quoniam ſi conſideretur Circulus per B.F.E. angulus F. erit dimidium arcus BCE(1.N.) Ergo quia F. & C. æquantur duobus rectis ex *hyp*: vel dimidio Circuli, erit C. dimidium arcus BFE: ergo erit etiam C. in circumferentia Circuli(2.N.)

5 *Sit BCE. ſemicirculus dico quemlibet angulum BCE. eſſe rectum:* quia eſt dimidium ſemicirculi oppoſiti BFE.(1.N.) Ergo eſt rectus(11.P.)

Sit Segmentum FBC. maius ſemicirculo: dico quemlibet angulum FBC. eſſe acutum. Quia eſt dimidium oppoſiti arcus CEF (1.N.) ſed arcus CEF. eſt minor ſemicirculo: Ergo angulus CBF. erit minor dimidio ſemicirculo, vel minor angulo recto, nempe acutus (11.P.) *Sit ſegmentum CEF. minus ſemicirculo: dico quemvis angulum CEF. eſſe obtuſum.* Quia eſt dimidiū oppoſiti arcus CBE: qui maior eſt ſemicirculo(1.N.) Ergo angu-

gulus CEF. eſt maior recto; & obtuſus (11.P.)

E converſo. Si angulus eſt rectus erit in Semicirculo, ſi acutus in maiori ſegmento: Si vero obtuſus in minori. Quia angulus rectus, nequit eſſe in maiori, neque in minori ſegmẽto, & ſic de reliquis, vt ex demonſtratis liquet.

PROPOSITIO IIII.

De Circulis concentricis.

1 *Circuli habentes idem centrum æqualiter diſtant inter ſe, & è converſo.*

2 *Angulus centri ſecat arcus ſimiles, & angulus circumferentiæ diſsimiles.*

3 *Si recta ſecans Circulos concentricos nõ eſt per centrum, ſecat arcus diſsimiles.*

4 *Sed interſegmenta ipſius ſunt æqualia.*

DEMONSTRATIO. Fig.4.

Circuli BSG.CRL.habent idem centrum O. dico eſſe æquidiſtantes: & ſi æquidiſtant: dico habere idem centrum. O. Quoniam radij OB. ON.OF:OG.ſunt æquales: Ergo ſi auferãtur æquales etiam radij OC.OM.OE.OH. re-

remanebunt æquales diſtantiæ CB. MN. EF. HG.

E converſo. Si O. fuerit centrum Circuli BSG: & ex qualibus radijs OB. ON. OF. OG. auferantur diſtātiæ CB. MN. EF. HG. æquales ex *hypotheſi*, remanebunt æquales OC. OM. OE. OH: Ergo quia omnes rectæ ex puncto O. in circumferentiam CRL. ſunt æquales, erit O. centrum etiam Circuli CRL. (1. l. 3.)

2 *Angulus SOG. ſit in centro, & angulus SGN. in circumferentia: Dico arcus PEH. SFG. eſſe ſimiles, & arcus NS. MR. diſsimiles.* Quoniam arcus PEH. SFG. ſunt menſura eiuſdem anguli: Ergo ſunt ſimiles (10. P.) Ductis vero OR. OS. eſt angulus ROM. maior SON: Ergo arcus MR. maioris eſt valoris, quam NS. vnde ſunt diſsimiles (10. P.)

3 *Recta SG. ſecat duos Circulos concentricos, & non tranſit per centrum dico arcus REL. SFG. eſſe diſsimiles.* Quoniam ductis radijs OS. OR. OL. OG: eſt angulus SOG. maior ROL: totū parte: Ergo arcus SFG. eſt maioris valoris, vnde ſunt diſsimiles (10. P.)

4 *liſ-*

4 *Iiſdem poſitis dico inter ſegmenta SR. LG. tum SL. RG. eſſe æqualia.* Sit enim radius OF. perpẽdicularis chordæ SG. Ergo æquales erunt SZ. ZG. tum RZ. ZL. (2. l. 3.) Ergo ſi æqualibus ZS. ZG. auferantur æquales ZR. ZL. remanebunt æquales SR. LG: (4. P.) Et ſi æqualibus SR. LG. addatur communis RL. erit SL. æqualis RG. (4. P.) *Idem eſt in eccentricis, ſi recta ſit communi diametro perpendicularis.*

PROPOSITIO V.

De Circulis ſe interſecantibus.

1 *Qui ſe interſecant non ſunt concentrici.*

2 *Interſectio eſt in duobus tantum punctis.*

3 *Communis diameter communi chordæ eſt perpendicularis, & omnia biſecat, & contra.*

4 *Omnes rectæ ex interſectione ſecant arcus ſimiles in vtroque Circulo.*

DEMONSTRATIO. Fig. 5.

1 *Circuli ſe interſecantes non habent idem centrum.* Quia ſi eſſent concentrici, eſſent paralleli (4. l. 3.) ſed qui ſe interſecant non ſunt paralleli: Ergo neque concentrici.

2 Cir-

2 *Circuli* mqh. ngh. *ſe interſecant: dico interſectionem eſſe in duobus tãtum punctis* n.h. Quia C. eſt centrum Circuli *ngh.* non eſt centrum Circuli *nqh.* (1. N.) Ergo ex C. duæ tantum rectæ oppoſitæ duci poſſunt æquales C*n.* C*h.* in circumferentiam *nqh.* (1.l.3.) ſed ex C. ad omnia puncta circumferentiæ *ngh.* ſunt rectæ æquales: Ergo duo tantum puncta *n. h.* circumferentiæ *nqh.* communia ſunt circumferentiæ *ngh:* Ergo in duobus tantum punctis fit interſectio.

3 *Communis diameter OCA. tranſiens per vtrumque centrum, perpendicularis eſt chordæ communi* nh. *per ſectiones* n. h: *& ſecat ipſam, & arcus bifariam: & è converſo.* Quoniam △ O*n*C. & △ O*h*C. habẽt latera O*n.* O*h.* tum C*n.* C*h.* æqualia, & OC. commune: Ergo æquales ſunt anguli *n*OC. CO*h.* (4.l.1.) Ergo in Iſoſcele △ *n*O*h.* recta O*y.* biſecans angulum *h*O*n.* biſecat etiam baſim *nh.* & eſt ipſi perpendicularis (5.l.1.) Ergo quia radij O*q.* C*g.* ſunt chordæ perpendiculares biſecant etiam arcus *nqh. hgn:* & ſegmenta (2.l.3.)

E converſo. Si O*y.* ſit perpẽdicularis chor-

 dæ

dæ *nh.* illam biſecabit; & ſi illam biſecat, erit perpendicularis (2.l.3.) Ergo continuata tranſibit per centrum C. & erit communis diameter.

4 *Si ex interſectione* h. *ducantur* hm. hp. hn. *dico arcus* gd. mp. *tum* dn. pn. *eſſe ſimiles.* Cum enim punctum *h.* ſit in vtraque circumferentia erit angulus *ghd.* dimidium arcus *gd.* & etiam *mp:*(3.l.3.) Ergo arcus *gd. mp.* ſunt æqualis valoris, & ſimiles: idemque eſt de arcubus *dn. pn.* &c.

PROPOSITIO VI.

De Circulis ſe tangentibus.

1 *Qui ſe tangunt non ſunt concentrici.*

2 *Communis diameter tranſit per contactum, qui in vno tantum ſit puncto.*

3 *Recta per contactum, & vnius centrum tranſit etiam per omnium centra.*

4 *Quæ per contactum ſecat aliquem Circulum ex omnibus ſecant arcus ſimiles.*

DEMONSTRATIO. Fig. 6.

1 *Circuli ſe tangentes non habent idem centrum.* Quia ſi eſſent concentrici, æquidi-ſta-

ſtarent, & non ſe tangerent (4.l.3.)

2 *Circuli* AFG. Afg. *vel* AZX. *ſe tangunt: dico rectam CE. per vtriuſque centrum* C. *E. vel B. tranſire per contactum A: qui ſit in ſolo puncto A.* Sumatur enim quodlibet aliud punctum S. in circumferentia AS*f*. & ducatur CSR: ex centro C. ſecans Circulos in R. & P. Ergo quia centrum C. non eſt centrum E. neque B. recta CR. in circumferẽtiam convexam FAR. maior erit quã CA: vel CS: & recta CP. in circumferentiam cavam APZ. minor erit quam CA. vel CS. (1.l.3.) Ergo punctum S. non eſt punctum commune: neque in eo eſt contactus: Ergo cum hoc demonſtretur de quolibet puncto circumferentiæ AS*f*. quod non ſit in recta CBAE. contactus erit in ſolo puncto A. rectæ CBE: Vnde hæc per contactum eſt.

3 *Si recta CA. eſt per centrum C. & contactum A. dico eſſe pariter per centra B. E. &c.* Etenim quia recta CB. vel CE. tranſit per contactum A. (2.N.) recta CA. neceſſario tranſibit per centra B. E: quia centra, & cõtactus in eadem ſunt recta (2.N.)

4 *Per contactum Circulorum A. ducta ſit*

 re-

recta FA*f. Secans Circulum AFG. dico ſecare etiam reliquos, & ſegmenta ANF. ASf. APZ. eſſe ſimilia.* Quoniam anguli verticales FAG. *fAg.* ſunt æquales (1.l.1.) ſed arcus FG. *fg.* XZ. ſunt angulorũ æqualium dupli (3.l.3.) Ergo ſunt arcus eiuſdem valoris, & ſimiles (10.P.) Ergo ſi ex ſemicirculis AFG. A*fg.* AZX. auferantur; remanebunt ſimiles arcus ANF. AS*f.* APZ: & æqualis valoris: Ergo & ſegmenta erunt ſimilia (9.P.)

PROPOSITIO VII.

De recta Circulum Tangente.

pp. 16. 1 *Perpendicularis extremo diametri Circulum tangit in eo ſolo puncto, & è contra.*

2 *Quævis alia recta per contactum ſecat Circulum, & tangens in vno puncto eſt vnica.*

pp. 18. 3 *Radius ad contactum eſt perpendicularis tangenti: & è converſo.*

4 *Si plures Circuli in eodem ſe tangant puncto, habent in eo communem tangentem.*

pp. 32. 5 *Quæ per contactum ſecat Circulum, facit cum tangente angulos æquales illis, quos alterna ſegmenta capiunt, & è converſo.*

DE-

DEMONSTRATIO. Fig. 7.

1 *Sit AL. perpendicularis extremo diametri AEG: dico ALD. tangere Circulum in ſolo puncto A: & è converſo.* Si enim in LD. ſumatur præter A. quodlibet punctum L. & ducatur EL. quoniam angulus EAL. in △ eſt rectus, erit ELA. minor recto (3.l.1.) Ergo oppoſitum latus EL. maius erit quam EA: vel EN. (5.l.1.) Ergo cum radius EN. terminetur in circumferentia, cadet quodlibet punctum L. & tota recta LD. extra Circulum: Ergo quia ſolum punctum A. eſt commune rectæ, & Circulo; illa erit tangens, & in illo ſolo puncto erit contactus.

2 *LD. ſit perpendicularis extremo diametri AG. & tangat Circulum in A. per quod tranſeat quævis alia AF. dico hanc ſecare Circulum; & per A. nullam aliam tangentem eſſe præter LD.* Cum enim angulus LAE. ſit rectus, erit FAE. acutus: Ergo ſi EH. ſit perpendicularis AF. erit angulus rectus H. maior angulo HAE: Ergo in △ AEH. latus EH. minus quam EA. vel EN. (5.l.1.) Ergo cum punctum N. radij EN. ſit in circumfe-

ferentia erit H. intra Circulum: Ergo quævis AH. continuata ſecabit Circulum: Vnde tangens per A. vnica eſt LAD.

3 *LD. tangat Circulum in A: dico radium EA. eſſe perpendicularem tangenti LD: & ſi AG. ſit perpendicularis LD. dico AG. tranſire per centrum E:* Quia perpendicularis radio EA. tanget Circulum in A (1.N.) ſed tangens in A. eſt vnica (2.N.) Ergo cum LD. tangat Circulum in A. erit LD. perpendicularis radio EA. & radius EA. perpendicularis tangenti LD: Vnde cum ex A. vnica ſit perpendicularis ipſi LD. (5.l.1.) Si AG. ſit perpendicularis, erit ipſa AE. & trãſibit per centrum E.

4 *Si plures Circuli ſe tangant in A. & recta LD. vnum tangat AFG. in A. dico tangere etiam reliquos in A.* Quoniam recta per centrum E. & contactum Circulorum A. tranſit per reliqua centra B. &c. (6.l.3.) ſed tangens LD. eſt perpendicularis radio AE. (3.N.) Ergo etiam eſt perpendicularis Radio BA. &c. Ergo LD. tangit reliquos etiam Circulos. (1.N.)

5 *Recta LD. tangit Circulum in A. & per*

per A. recta AF. ipſum ſec t : dico angulum LAF. eſſe æqualem angulo ſegmenti oppoſiti FGA: & angulum FAD. eſſe æqualem angulo ſegmenti oppoſiti ANF: Ducta enim diametro AEG: erit angulus LAG. rectus (3.N.) & ducta FG. erit angulus AFG. in ſemicirculo rectus (3.l.3.) Ergo GAF. & FGA. efficient vnum rectum (3.l.1.) ſed etiã GAF. & FAL. efficiunt vnum rectum: Ergo angulus LAF. æqualis eſt ipſi FGA : ſed omnes anguli in ſegmento AKGF. æquales ſunt inter ſe, & ipſi FGA: (3.l.3.) Ergo omnes ſunt æquales ipſi FAL.

Præterea ſi in arcu ſegmenti ANF. ſumatur quodlibet punctum N. & ducantur NA. NF. erit quadrilaterum ANFG. in Circulo: Ergo anguli N. & G. oppoſiti æquales erunt duobus rectis (3.l.3.) ſed etiam LAF. FAD. ſunt æquales duobus rectis (1.l.1.) Ergo ablatis æqualibus LAF. FGA. remanebunt æquales ANF. & FAD. (4.P.) Ergo angulus FAD. æqualis eſt cuilibet ANF. oppoſiti ſegmenti : Ergo ſecans AF. cum Tangente LD. in puncto contactus facit angulos æquales illis, qui in alternis, vel oppo-

poſitis ſegmẽtis efformari poſſunt: vel quos alterna ſegmenta capiunt.

E converſo. Si angulus LAF. æqualis ſit angulo AFG. erit AL. tangens quia ſi per A. ducatur tangens efficiet eundem angulum (5. N.) ergo erit ipſa AL: (10. P.) Ergo AL. eſt tangens.

Propoſitio 35. 36. 37. *Euclidis.*

Locum habent in fine libri *6.* prop. *6.* quia ſpectant ad proportionem rectarum, & facilius ibi demonſtrantur.

LIBER IV.

EVCLIDIS.

TOtus liber quartus Practicus eſt, & omnes illius propoſitiones problemata ſunt, quæ in Geometria Practica ſeorſim tradita reſolvuntur.

LI-

LIBER V.

DE RATIONE, ET PROPORTIONE quantitatum in communi.

RAtio, & Proportio quantitatum, & omnia quæ ad plenam huius libri cognitionem ſpectant, explicata iam ſunt in Proæmialibus 18. 19. 20. 21. & à Lectore hic recolenda, vt ſumme neceſſaria.

Omnes huius libri propoſitiones mera ſunt Axiomata, quæ terminorum expoſitione potius quam demonſtratione indigent: vt præmonuere Petrus Ramus in Scholis Mathematicis; & R. P. Andræas Tacquet in Geometria.

Libri 5. Propoſitiones ſunt 5.

Prop. 1. *De Rationibus æqualibus.*
Prop. 2. *De Quantitatibus æqualibus.*
Prop. 3. *De Quantitatibus inæqualibus.*
Prop. 4. *De Terminis Proportionalibus.*
Prop. 5. *De Toto, & partibus.*

PROPOSITIO I.

De Rationibus æqualibus.

1 *Rationes eidem rationi æquales, vel ſimiles, ſunt inter ſe æquales vel ſimiles.*

2 *Quæ eiuſdem ſunt duplicatæ, vel triplicatæ, &c. ſunt æquales inter ſe; & è contra.*

3 *Si eadem ratio ſit duplicata, vel triplicata aliarum, ſunt iſtæ æquales, & è contra.*

4 *Compoſitæ ex æqualibus ſunt æquales, & contra.*

EXPOSITIO.

1 Sint tres rationes in qualibet ſpecie.

B ad C. *D ad E.* *F ad G.*

Si ratio *B. ad C.* fuerit *vt D ad E*: & ratio *F ad G.* fuerit etiam *vt D ad E*: erit etiam *F ad G. vt B ad C*: nempe ſi *6 ad 3*: eſt *vt 2 ad 1*: & 8 *ad 4*: etiam *vt 2 ad 1*: erit *6 ad 3*: vt 8 *ad 4*. quia ſi ſecunda ratio eſt dupla etiam prima, & tertia erunt duplæ: Ergo erunt ſimiles inter ſe, & ſic de reliquis: Hoc de omni quantitate intelligendum eſt, ſi litteris ſubſtituantur numeri, lineæ, ſuperficies, vel corpora: dummodo in ſingulis rationibus quantitates ſint eiuſdem ſpeciei: prout

prout in Procemiali 18. animadverſum fuit.

Hic maxime notandum eſt rationes eſſe eaſdem, æquales, vel ſimiles idem omnino ſignificare: quia rationem *B ad C.* eſſe candem rationem *D ad E.* vel rationem *B ad C.* æqualem eſſe, vel ſimilem rationi *D ad E.* nihil aliud eſt, quam vtrumque *antecedens* habere eandem, vel ſimilem habitudinem ad ſuum *conſequens:* vel ſimilem continendi modum.

2 Sint rationes in qualibet ſpecie.

B ad C. *D ad E.* *F ad G.*

18 *ad* 2. 3 *ad* 1: 36 *ad* 4.

Si ratio *B ad C.* fuerit duplicata rationis *D ad E:* illã bis continebit: & ſi ratio *F ad G,* fuerit duplicata rationis *D ad E.* eandem bis continebit (2 1. P.) Ergo ratio *B ad C:* eadem erit ac ratio *F ad G.*

Si ratio 18 *ad* 2. bis continet rationem triplam 3 *ad* 1: & ratio 36 *ad* 4. bis etiam contineat rationem triplam 3 *ad* 1: erit 18 *ad* 2: vt 36 *ad* 4: vtraque noncupla.

E converſa. Si ratio *B ad C:* ſit eadẽ *F ad G.* & ratio *B ad C.* fuerit duplicata rationis *D ad E:* etiam ratio *F ad G:* quæ eſt eadem

ratio *B ad C:* erit duplicata eiuſdem rationis *D ad E:* vt patet in numeris aliter non eſſet vtraque eadem ratio. Idem omnino eſt de rationibus eiuſdem triplicatis, vel quadruplicatis, &c.

3 Sint rationes in qualibet ſpecie.

B ad C.	*D ad E.*	*F ad G.*
9 *ad* 1.	3 *ad* 1.	6 *ad* 2.

Si ratio *B ad C.* fuerit duplicata rationis *D ad E:* & eadem ratio *B ad C.* fuerit etiam duplicata rationis *F ad G:* rationes *D ad E:* & *F ad G.* æquales erunt: quia quævis illarum eſt dimidium rationis *B ad C.*

E converſo. Si ratio *D ad E:* æqualis ſit rationi *F ad G:* & ratio *B ad C.* fuerit duplicata vnius, etiam erit duplicata alterius: vel triplicata, vel quadruplicata, &c, aliter illæ non eſſent eadem ratio.

4 *Rationes quæ ex æqualibus rationibus componuntur ſunt æquales.*

B. 9.	*C.* 3.	*D.* 2.
E. 18.	*F.* 6.	*G.* 4.

Ratio *B ad D.* compoſita eſt ex rationibus *B ad C* + *C ad D.* (21. P.) & ratio *E ad G.* cõpoſita eſt ex rationibus *E ad F* + *F ad G.*

Si

Si ergo ratio *B ad C.* fuerit ipſa *E ad F.* & ratio *C ad D*: ipſa *F ad G.* erit ex *æquo*, vel *æqualitate*, ratio *B ad D.* ipſa ratio *E ad G*: Quæ enim ex ijſdẽ, æqualibus, vel ſimilibus partibus conſtant eædem, æquales, vel ſimiles ſunt: & dicitur hæc ratio eadem ex *æquo*, vel ex *æqualitate*: ſcilicet propter æqualitatem compoſitionis.

Hæc omnia clariſsima ſunt, & ex ipſa terminorum apprehenſione cõſtat, rationes inter ſe vt quantitates comparari poſſe; & harum axiomata illis convenire.

PROPOSITIO II.

De quantitatibus æqualibus.

1 *Quantitates æquales eandem habent rationẽ eidem, vel pluribus æqualibus.*

2 *Si plures quantitates eandem habeant rationem eidem, ſunt illæ æquales.*

3 *Eadem quantitas eandem habet rationẽ quibuslibet alijs æqualibus.*

4 *Si eadem quantitas eandem habeat rationem pluribus, ſunt iſtæ æquales.*

5 *Mediæ inter eoſdem, vel æquales terminos ſunt æquales: & contra.*

EX-

EXPOSITIO.

1 Sint quãtitates æquales *B.C:* & *D.E.*

B 3. *C* 3. *D* 9. *E* 9.

Si *B.* & *C.* ſint æquales eadẽ erit ratio *B ad D.* quæ *C ad D:* & ſi *D.* & *E.* ſint æquales eadem erit ratio *B ad D.* quæ *C ad E:* vel ratio *B ad E.* eadem quæ *C ad D:* &c. Quia quantitates æquales conſiderantur, vt habentes eandem magnitudinem, licet earum materia, vel figura diverſa ſit: Vnde eandem neceſſario habebunt rationem ad tertiam; vel ad alias æquales.

2 E *converſo.* Si Ratio *B ad D:* ſit eadẽ quæ *C ad D:* erunt *B.* & *C.* æquales: vel ſi ratio *B ad D.* ſit eadem quæ *C ad E:* & fuerint *D. E.* æquales, erunt etiam *B.* & *C.* æquales: quoniam quæ eundem habent continendi modum reſpectu eiuſdem, vel æqualium: eandem habent magnitudinem: & ſic ſunt æquales, & quaſi eadem quantitas.

3 Si *D.* & *E.* ſint æquales eadem erit ratio *B ad D.* quæ *B ad E:* quia *B.* eundem continendi modum habet reſpectu *D.* quem reſpectu *E:* cum *D.* & *E.* ſint quaſi eadem

quan-

quantitas propter æqualitatem.

4 E *converſo.* Si *B ad E.* ſit eadem ratio quæ *B ad D*: erunt *D.* & *E.* æquales: ob eandem cauſam: Quæ omnia ex 3. *axiom.* naſcuntur (3.P.)

5 *Sint continuæ proportionales* B. C. E: *tum* B. D. E: *dico* C. & D. *eſſe æquales*: quia ratio *B ad E.* eſt duplicata rationis *B ad C*: & duplicata rationis *B ad D.* (21.P.) Ergo ratio *B ad C.* eſt ipſa ratio *B ad D.* (1.l.5.) Ergo quia *B.* eandem habet rationem ad *C.* & ad *D.* ſunt *C.* & D. æquales (4.N.) Idem eſt ſi *D.* ſit media inter *F.* & *G.* æquales ipſis *B.* & *E.* & è converſo.

PROPOSITIO III.

De Quantitatibus inæqualibus.

1 *Maior quantitas maiorem habet rationem tertiæ quam minor, & è converſo.*

2 *Eadem quantitas maiorem habet rationem minori, quam maiori, & è converſo.*

3 *Si duæ quantitates eandem habent rationem duabus inæqualibus, inæquales ſunt.*

4 *In iiſdem rationibus maius antecedens habet maius conſequens, & è converſo.*

EX-

EXPOSITIO.

1 Sint inæquales *B*. & *C*. tum *D*. & *E*.

B 6. *C* 2. *D* 3. *E* 1.

Si *B*. ſit maior quam *C*: & vtraque comparetur ipſi *E*. maior erit ratio *B ad E*. quam *C ad E*: nempe ratio 6 *ad* 1. maior eſt quam 2 *ad* 1. Similiter ſi *D*. maior ſit quam *E*: & vtraque comparetur ipſi *C*: maior erit ratio *D ad C*. quam ratio *E ad C*: nēpe ratio 3 *ad* 2: maior quam ratio 1 *ad* 2: quia quæ maior eſt: maiorem habet continendi modum.

E *converſo*. Si ratio *B ad E*: maior ſit ratione *C ad E*: erit *B*. maior quam *C*. Etenim quæ maiorem habet continendi modum maior eſt.

2 Si eadem quantitas *B*. comparetur inæqualibus *D*. & *E*: ſit vero *E*: minor quam *D*. Ratio *B ad E*. maior erit quam ratio *B ad* D. Et *è converſo*. Si ratio *B ad E*. maior ſit quam ratio *B ad* D. erit E. minor quā D. Eadem enim quantitas maiorem habet cōtinendi modum reſpectu alterius minoris, quam alterius maioris, &c.

3 Si

3 Si ratio *B ad D.* eadẽ ſit quæ *C ad E.* & conſequentes *D. E.* ſint inæquales, etiam antecedentes *B. C.* erunt inæquales: quia ſi antecedentes eſſent æquales; etiam conſequentes eſſent æquales (2.l.5.) Ergo cum conſequentes ſint inæquales ex *hyp.* nequeũt antecedentes eſſe æquales: Et *è converſo.* Si antecedentes *B.* & *C.* ſint inæquales, etiam conſequentes *D.* & *E.* inæquales erunt.

4 Si ratio *B ad D.* ſit eadẽ, quæ *C ad E:* Si *B.* fuerit maior quam *C.* erit *D.* maior quã *E:* Quoniam ſi *D.* & *E.* eſſent æquales maior eſſet ratio *B ad D.* quam *C ad E:* & multò maior ſi *D.* eſſet minor (2.N.) quod eſt cõtra *Hyp.*

E converſo. Si *D.* fuerit maior quam *E.* etiam *B.* erit maior quam *C.* Quoniam ſi *B.* & *C.* eſſent æquales, eſſet minor ratio *B ad D.* quam *C ad E:* & multo minor, ſi *B.* eſſet minor *C.* (2.N.) Quod eſt contra *hypotheſim.*

PROPOSITIO IIII.

De Terminis Proportionalibus.

1 *Si quatuor termini fuerint directè proportionales, etiam invertendo, componendo, di-*

videndo, & alternando proportionales erunt.

2 *Summa antecedentium ad ſummam conſequentium eſt vt antecedens ad conſequens.*

3 *Si termini compoſiti ſint proportionales, etiam diviſi, & è converſo.*

4 *Si Termini ſint continuè proportionales; eorum differentiæ ſunt in eadem ratione, & è converſo.*

EXPOSITIO.

1 Sint quatuor proportionales *B.C.D.E.*

B 6. *C* 3. *D* 4. *E* 2.

Directè ſint proportionales *B ad C.* vt *D ad E.* *Inverſè* erunt vt *C ad B:* ita *E ad D:* quoniã ſi ratio *B ad C.* dupla ſit: & ratio *D ad E:* etiã dupla: erit ratio *C ad B.* ſubdupla, & etiam ratio *E ad D.* ſubdupla; vel è contra: Et ſic de reliquis: Ergo eadem erit ratio *C ad B.* quæ *E ad D.*

Compoſitè etiam proportionales erunt *B + C. ad C:* vt *D + E ad E.* quoniam ſi *B.* ſit dupla *C:* & *D.* ipſius *E:* erit *B + C.* tripla *C:* & *D + E.* tripla *E:* vel è contra, & ſic de reliquis: Ergo *B + C.* ad *C:* erit vt *D + E.* ad *E.*

Di-

Diviſè etiam proportionales erunt, nempe *B−C* ad *C:* vt *D−E.* ad *E:* Quoniam ſi *B.* ſit dupla *C:* & *D.* dupla *E:* erit *B−C.* æqualis *C:* & *D−E.* æqualis *E:* vel è contra, & ſic de reliquis, &c.

Hæc omnia vera ſunt licet rationes ſint in diverſa ſpecie quantitatis, vt ſi *B.* & *C.* fuerint lineæ: & *D.* & *E.* ſuperficies, corpora, vel numeri, aut è converſo.

Alternè, aut viciſsim, etiam proportionales erũt *B ad D:* vt *C ad E.* Si enim ſit *B ad C:* vt *D ad E:* erunt *C.* & *E.* ſimiles partes ipſarum *B.* & *D.* vel è contra: vnde vt *B ad D:* ita *C ad E:* &c.

Hæc ratio alterna, exigit vt quatuor termini ſint eiuſdē ſpeciei, ſi enim *B.* & *C.* fuerint lineæ, & D. & *E.* ſuperficies, vel corpora, aut è converſo, alterna comparatio locũ non habet.

2 Si *B ad C.* fuerit vt *D ad E.* ſumma antecedentium ad ſummam conſequentiũ, nempe *B+D.* ad *C+E.* erit vt *B.* ad *C:* nempe vt pars ad ſimilem partem.

3 Si compoſitè *B+C ad C.* fuerint vt *D+E. ad E:* etiam *diviſè* erunt vt *B ad C:*

 ita

ita *D ad E:* quia hæc eſt ipſa *diuiſio* ſupra explicata.

4 *Si fuerint continui B.C.D. E.& eorum differentiæ F.G.H: continuæ erunt in eadem ratione* B ad C.

B 27. *C* 18. *D* 12. *E* 8.
F 9. *G* 6. *H* 4.

Quia *B ad C:* eſt vt *C ad D:* & *diviſè erit B−C ad C:* vt *C−D ad D.* (1.N.) ſed *B−C.* eſt *F:* & *C−D* eſt *G:* Ergo eſt *F ad C.* vt *G ad D.* (2.l.5.) Ergo & alternãdo *F ad G:* vt *C ad D.* vel vt *B ad C:* ſimiliter *G ad H.* erit vt *D ad E:* vel vt *B ad C:* Ergo differentiæ F.G.H. continuæ ſunt in eadem ratione.

E converſo. Si *F ad G.* eſt vt *C ad* D: erit *F ad C.* vt *G ad* D: & cõpoſite vt *F+C ad C.* ita *G+D ad D:* hoc eſt vt *B ad C.* ita *C ad D.* (1.N.) Ergo *B.C.D.* erunt termini continue proportionales.

PROPOSITIO V.

De Toto, & partibus.

1 *Vt totum ad totum ita pars ad partem ſimilem, vel eiuſdem denominationis.*

2 *Vt pars ad partem ſimilem ita totum ad totum.*

3 *Si pars ad partem fuerit vt totum ad totum; erunt partes ſimiles, & etiam reſidua: quæ erunt in eadem ratione.*

4 *Si vt pars ad partẽ, ita fuerit reſiduum ad reſiduum; ita erit totum ad totum: & illæ erunt ſimiles, & etiam reſidua.*

EXPOSITIO.

1 Sit totum *B+C*: *& aliud totum D+E.*

B 6 + C 3. *D 2 + E 1.*

Si *B.* & *D.* ſint partes ſimiles tum *C.* & *E.* erit vt totum *B+C.* ad totum *D+E.* ita *B ad D*: vel *C ad E*: Quia ſi totum bis continet aliud totum, & dimidium illius bis cõtinebit iſtius dimidium: vel decies ſi decies, &c. idemque eſt de tertia, quarta, vel quinta parte, &c. vt per ſe notum eſt: Ergo, &c.

2 Si *B.* & *D.* fuerint ſimiles partes duplicis compoſiti, erunt vt *B ad D*: ita totum *B+C. ad totum D+E.* quia ſi dimidium ſit triplum dimidij: & totum erit triplum totius, & ſic de reliquis: Ergo, &c.

3 Si pars *B. ad partem D.* fuerit vt totum *B+C. ad totum D+E*: erunt *B.* & *D.* partes ſimiles: & reſidua *C.* & *E.* erunt etiã

par-

partes ſimiles in eadem ratione ſcilicet *C ad E*: vt *B ad D*. vel vt *B*+*C*. ad *D*+*E*. Si enim ex toto *D*+*E*, ſumatur quævis pars X. Similis ipſi *B*: erit *B ad X*: vt *B*+*C*. *ad D*+*E*. (1.N.) ſed *B ad D*. eſt vt *B*+*C*. *ad D*+*E*. ex *hyp*: Ergo *B ad X*. erit vt *B ad D*. (1.l.5.) Ergo *D*. & *X*: æquales erũt (2.l.5.) Vnde tam *D*. quam *X*. erunt partes ſimiles ipſi *B*: idemque eſt de reſiduis: Ergo erunt vt totum ad totum. (1.N.)

4. Si fuerit vt B *ad D*: ita reſiduum *C ad E* reſiduum: erit etiam B+*C*. *ad D*+*E*. vt B *ad D*: quia ſi B. continet bis *D*: & C. bis *E*: etiam B+*C*. bis continebunt *D*+*E*: & ſic de reliquis: Ergo, &c.

Quæ omnia vt mera axiomata explicata potius, quàm demonſtrata ſunt.

LI-

LIBER VI.

DE RATIONE, ET PROPORTIONE In Figuris planis.

HIc liber *Aureus* dicitur, & merito quidem propoſitiones enim continet adeò nobiles, & fæcundas, vt vix in vniverſa Matheſi Problema, vel Theorema inſigne liceat invenire; quod ab hoc Aureo libro, tanquam à ſuo limpidiſsimo fonte non effluat. Quamobrem Geometriæ ſtudioſus huic vni ediſcendo maximê inſudare debet, & omnes animi vires intendere vt huius Theoremata nobiliſsima rite percipiat, & comprehendat.

Propoſitiones libri 6. ſunt 6.

Prop. 1. *De Triangulis, & Parallelogrãmis diſsimilibus.*

Prop. 2. De *Triangulis ſimilibus.*

Prop. 3. De *rectis angularibus.*

Prop. 4. De *rectilineis ſimilibus.*

Prop. 5. *De Circulis, & eorum partibus.*

Prop. 6. *De rectis in Circulo.*

PRO-

PROPOSITIO I.

De Triangulis, & Parallelogrammis diſsimilibus.

Pp°1. lib. 6. Euclidis. 1 *Si habent altitudinem æqualem, ſunt in ratione baſium; ſi habent æqualem baſim, ſunt in ratione altitudinum, & contra.*

Pp. 23. or. 2 *Omnia rationem habent, ex rationibus altitudinum, & baſium compoſitam.*

3 *Quæ baſes, & altitudines habent reciprocas ſunt æqualia, & è converſo.*

Pp 23 4 *Si æqualem habent angulum, rationem habent ex ipſius lateribus compoſitam.*

Pp 14 et 15 5 *Si habeant latera circa æqualem angulum reciproca, erunt æqualia, & contra.*

Pp 16 et 17 6 *Si tres, vel quatuor rectæ ſint proportionales, triangulum, vel Parallelogrammum extremarum æquale eſt illi, quod ex media, vel medijs ſit cum æquali angulo: & contra.*

DEMONSTRATIO. Fig. 1.

1 *Sint △b. & △d. æquè alta.* Dico *ſe habere vt baſes: nempe △b. ad △d: eſſe vt* B*N.* ad *ND*: Quoniam ſi △△ ſint æquê alta; eſſe poſſunt inter Parallelas; & ſi baſis B*N*. ſit æqua

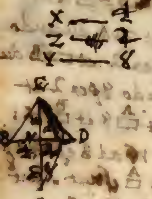
æqualis ND. erit △*b*.æquale △*d:* (8.l.1.) ſi BN.ſit dupla ND.erit etiam △*b*. duplum △*d:* ſi tripla triplum, &c. Ergo quia △*b*.eodem modo continet △*d*.quo baſis BN. baſim ND.erit ratio △*b*.ad △*d*. vt baſis BN. ad baſim ND.(19.P.) Eadem eſt demonſtratio de altitudinibus ſi baſes fuerint æquales: Idemque eſt de Parallelogrammis.(8. l.1.)

E converſo. Si △b. ad △d. fuerit vt baſis BN. ad ND.erunt triangula æquè alta. Quoniam ſi ſupra baſim ND. cõſideretur quodvis △*y*. æquê altum △*b:* erit △*b*. ad △*y*. vt BN. ad ND : ſed △*b*. ad △*d*. etiam eſt vt BN. ad ND. ex *Hyp*: Ergo △*y*. erit ipſum △*d:*vel ipſi æquale(2.l.5.) Ergo △*y*.&△*d:* habebunt eandem altitudinem cum ſint æqualia ſupra eandem baſim ND.(8.l.1.) Ergo etiam △*b*.& △*d*.erunt æquê alta : Similiter demonſtrabitur baſes eſſe æquales ſi △△ ſe habeant vt altitudines. Idemque eſt de Parallelogrammis.



2 *Sint △b.& △g. & baſis BN.ad ND. ſit vt X.ad Z.& altitudo EN.ad NC : vt Z.ad Y.erit ratio X.ad Y.cõpoſita ex ratione X.ad Z.*

& Z.ad Y: vel ex rationibus baſium, & altitadinum (21. P.) Dico igitur △*b.*ad △*g. eſſe vt X.ad Y: vel habere rationem ex baſibus, & altitudinibus compoſitam.*



Si enim ſupra baſim ND. fiat △*d.* æquê altum △*b:* erit △*b.* ad △*d.* vt baſis BN. ad ND: (1.N.) hoc eſt vt X. ad Z: tum quia △*d.* & △*g.* habent eandem baſim ND: eſt △*d.* ad △*g:* vt altitudo NE.ad NC. (1.N.) hoc eſt vt Z.ad Y: ſed quia ſunt tres quantitates eiuſdē generis △*b:* △*d.*△*g.* ratio △*b.* ad △*g.* compoſita eſt ex ratione △*b.*ad △*d:* & ex ratione △*d.* ad △*g* (21.P.) hoc eſt ex ratione X.ad Z: & ex ratione Z.ad Y: Ergo △*b.* ad △*g.* eſt vt X.ad Y: quæ eſt ratio cōpoſita ex ratione baſium X. ad Z. & ex ratione altitudinum Z.ad Y. Idem concluditur de Parallelogrammis eodem modo: tum quia ſunt triangulorum dupla.

3. *Habeant* △*b.* & △*g. baſes, & altitudines reciprocas; baſis DN.ad NB: ſit vt altitudo NE.ad NC: nempe ex quatuor proportionalibus ſint duæ mediæ in* △*b.* & *duæ extremæ in* △*g. Dico* △*b.* & △*g.eſſe æqualia.*

Supra baſim ND. fiat △*d.*æquê altū △*b:*

&

& erit △*d.* ad △*b.* vt baſis DN. ad NB. (1.N.) ſed △*d:* ad △*g:* (cum habeat eandem baſim DN:) eſt vt altitudo NE. ad NC. (1. N.) Ergo quia eadem eſt ratio DN. ad NB: & EN. ad NC: eãdem habet rationem △*d.* ad △*b.* & ad △*g:* Ergo △*b.* & △*g.* æqualia ſunt (2.l.5.) Idemque eſt de Parallelogrammis.

E converſo: Si △b. & △g. æqualia ſint, baſes, & altitudines erunt reciprocæ. Quia ſi ſupra ND. fiat △*d.* æquè altum △*b:* erit *d.* ad *b:* vt baſis DN. ad NB: & *d* ad *g.* erit vt altitudo EN. ad NC. (1.N.) ſed quia *b.* & *g.* ſunt æqualia eſt *d.* ad *b.* vt *d.* ad *g.* (2.l.5.) Ergo baſis DN. ad NB. eſt vt altitudo EN. ad NC. (1.l.5.) & quia duæ mediæ ſunt in △*b.* & duæ extremæ in △*g.* ſunt baſes, & altitudines reciprocæ (22.P.) idem de Parallelogram.

4 *Si △b. & △g. habeant angulos BNE. DNC. æquales: & ſumatur X. ad Z. vt BN. ad ND. & X. ad Y. vt EN. ad NC. dico △b: ad △g. eſſe vt X. ad Y: vel in ratione compoſita X. ad Z. & Z. ad Y: nempe in ratione cõpoſita ex laterũ rationibus BN. ad ND. & EN. ad NC.*

 (Con-

Coniungantur anguli æquales in N. vt EN. & NC. efficiant eandem rectam: & erunt anguli CND. DNE. æquales duobus rectis(1.l.1.) Ergo etiam DNE. & ENB: Ergo BN. ND. ſunt eadem recta. Ducta igitur recta DE: erit △*b*.ad △*d*. æquè altũ, vt baſis BN. ad ND. vel vt X. ad Z. (1.N.) & △*d*. ad △*g*. æquè altum vt baſis EN. ad NC: vel vt Z. ad Y. (1.N.) ſed cum ſint tria *b. d. g.* ratio *b*. ad *g*. eſt compoſita ex ratione *b*. ad *d*: & *d*. ad *g*. vel ex ratione X. ad Z: & Z. ad Y. (21.P.) Ergo △*b*. ad △*g*. eſt vt X. ad Y: quæ eſt ratio compoſita ex X. ad Z: & Z. ad Y: vel ex laterum rationibus BN. ad ND. & EN. ad NC.

5 *Si △ b. & △ g. habeant æqualem angulum BNE. DNC: & latera circa ipſum reciproca DN. ad NB: vt EN. ad NC. dico △△ eſſe æqualia.*

Coniungantur vt antea in N: & △*d*. ad △*b*. æquè altum erit vt DN. ad NB: & idem △*d*. ad △*g*. æquè altum erit vt EN. ad NC. (1. N.) ſed DN. ad NB. eſt vt EN. ad NC. ex *hyp*: ergo △*d*. eandem habet rationem ad △*b*. & ad △*g*: Ergo △*b*. & △*g*. æqualia ſunt (2.l.5.)

E

E converſo. Si △b. & △d. ſint æqualia, & habeant æqualem angulum BNE. DNC. dico latera circa ipſum eſſe reciproca DN. ad NB: vt EN. ad NC. Cum enim ſint æqualia *b.* & *g.* erit *d.* ad *b*: vt *d.* ad *g*: (2.l.5.) ſed *d* ad *b.* eſt vt DN. ad NB: & *d* ad *g.* eſt vt EN. ad NC. (1.N.) Ergo DN. ad NB. eſt vt EN. ad NC. (1.l.5.) Ergo latera ſunt reciproca, nempe duo media ſunt in △*b*: & extrema in △*g.* Idemque eſt de Parallelogrammis.

6 *Si quatuor rectæ ſint proportionales DN. ad* NB: *vt EN. ad* NC: *erit △b. ex medijs ſub quovis angulo BNE. æquale △g. ex extremis ſub æquali angulo DNC.* Quia ſi duæ mediæ ſint in △*b.* & duæ extremæ in △*g.* erunt latera circa æqualem angulum reciproca DN. ad NB: vt EN. ad NC. (22.P.) Ergo △*b.* & △*g.* cum habeant latera reciproca erunt æqualia (5.N.)

E converſo: Si △b. & △g. æqualia ſint cum æquali angulo: erunt latera reciproca DN. ad NB: vt EN. ad NC. (5.N.) Ergo △*b*: erit factũ ex medijs: & △*g.* ex extremis (22.P.)

Si vero fuerint tres continuè proportionales DN. NB. NC: & ſumatur EN. æqualis me-

diæ

latera proportionalia ſunt ſimilia.

5 *Quæ habent æqualem angulum, & latera circa alium proportionalia, & tertium eiuſdem ſpeciei, ſunt ſimilia.* 2 corol. pp. 4

6 *Si Triangula ſimilia baſes habeant in eadem recta, vel Parallelas; erunt latera Parallela, & è converſo.* 1 corol. pp. 4

DEMONSTRATIO. Fig. 2.

1 *Sint △ BNC. & △ DNE. æquiangula, dico omnia latera eſſe proportionalia, & triãgula ſimilia.* Continuentur anguli æquales ad verticẽ; & reliqui æquales alterni E. C. tum D. B: & erunt ED. BC. Parallelæ (2.l.1.) ductis ergo BE. CD. erunt △ BCD. & △ DCE. ſupra eandem baſim BC. & inter Parallelas. Ergo erunt æqualia (8.l.1.) & ablato communi BCN. remanebit △ BNE. æquale △ DNC: & anguli verticales BNE. CND. æquales: Ergo latera circa angulos BNE. CND. erunt reciproca: BN. ad ND: vt CN. ad NE. (1.l.6.) Ergo alternando BN. ad NC: vt DN. ad NE. (4.l.5.) Ergo latera circa æquales angulos BNC. DNE. ſunt directè proportionalia: ſimiliter ſi æqua-

æquales anguli E.C.coniungantur demonſtrabitur EN.ad ED:vt CN.ad CB:&c.Ergo cum triangula æquiangula habeant latera circa æquales angulos proportionalia, ſunt ſimilia(22.P.)

2 *In △ FNG. eſt recta BC. vel ED. ſupra verticem Parallela baſi FG: dico efficere triangula, & ſegmenta ſimilia.* Anguli enim NBC. NFG.æquales ſunt tum NCB.NGF. tum NED. NGF.&c. ex Parallelismo(2.l. 1.)& angulus N.communis: Ergo cum triãgula ſint æquiangula,ſunt ſimilia(1.N.) & latera circa æquales angulos proportionalia:vt totũ FN.ad NG.ita pars BN.ad NC: Ergo,& reſiduum BF.ad CG.eſt vt BN. ad NC.(5.l.5.)& FN.ad FG: vt NB. ad BC: vel vt ND.ad DE.&c.

E converſo. Si recta BC.facit triangula ſimilia ſecans proportionaliter latera, erit BC. Parallela baſi FG. Quia ſi per B. conſideretur Parallela baſi, ſecabit proportionaliter latera(2.N.)Ergo quia BC:ſecat in eadem ratione BN.ad NC. vt FN. ad NG: ipſa eſt Parallela baſi.

3 *Si △ FNG.& △GMO.habent omnia*

la-

latera proportionalia, erunt ſimilia. Sumatur enim FB. æqualis GM: & ſit BH. Parallela NG: & erit FB. ad FH: vt FN. ad FG. (2.N.) ſed etiam GM. ad GO. eſt vt FN. ad FG. ex *hyp:* Ergo FB. ad FH. eſt vt GM. ad GO. (2.l.5.) & alternando vt FB. æqualis GM: ita FH. æqualis GO. (4.l.5.) & ſimiliter vt FB. æqualis GM. ita BH. æqualis MO: Ergo quia tria latera △ FBH. æqualia ſunt tribus △ GMO: ſunt æquiangula △△. nempe △ GMO. & △ FBH. (4.l.1.) ſed △ FBH. eſt æquiangulum △ FNG. (2.N.) Ergo, & △ GMO. eſt æquiangulũ △ FNG. Ergo, & ipſi ſimile (1.N.)

4 *Si △ MGO. & △ NFG. habeant angulos G. & F. æquales, & latera circa ipſos proportionalia, erunt ſimilia.* Sumatur FB. æqualis GM: & ſit BH. Parallela ipſi NG: & erit FB. ad FH. vt FN. ad FG. (2.N.) ſed GM. ad GO. etiam eſt vt FN. ad FG. ex *hyp:* Ergo FB. ad FH. eſt vt GM. ad GO. (1.l.5.) Ergo alternãdo vt FB. æqualis GM. ita FH. æqualis GO. (4.l.5.) Ergo quia △ BFH. & △ MGO. habent angulos F. G. æquales, & latera circa ipſos æqualia, ſunt omnia æqualia

lia (4. l. 1.) Ergo ſunt æquiangula; ſed △ FBH. eſt æquiangulum, & ſimile △ FNG. (2.N.) Ergo & △ GMO. eſt æquiangulum, & ſimile △ FNG. &c.

5 *Si △ FNG. & △ GMO. habeant angulos NFG. MGO. æquales: & latera circa N. & M. proportionalia FN. ad NG. vt MG. ad MO. & reliquos NGF. MOG. eiuſdem ſpeciei dico eſſe ſimilia.* Quia ſi ſumatur FB. æqualis GM: & ſit BH. Parallela ipſi NG: erit FB. ad BH: vt FN. ad NG. (2.N.) Ergo etiã vt GM. ad MO. (1.l.5.) & alternando vt FB. æqualis GM: ita BH. æqualis MO. (4. l.5.) Ergo quia △△ FBH. GMO. habent duo latera æqualia; & vnum angulum oppoſitum æqualem, & reliquum eiuſdem ſpeciei, ſunt omnino æqualia (4.l.1.) ſed △ FBH. eſt æquiangulum, & ſimile ipſi △ FNG. (2.N.) Ergo △ GMO. æquiangulũ, & ſimile eſt △ FNG. &c.

6 *Si △ END. & △ OMG. ſimilia ſint & baſes habeant Parallelas ED. OG. latera ſimilia erunt Parallela: idemque eſt ſi baſes ſint in eadem recta.* Quia ſi baſis OG. continuetur quovſque ſecet latera, ſi opus ſit continuata;

erit △ FNG. æquiangulum END. (2.N.) Ergo etiam ipſi GMO. Ergo anguli MGO. & NFG. erunt æquales, & FND. & GM. Parallelæ (2.l.1.) ſimiliter anguli NGF. & MOG. erunt æquales, & GNE. OM. Parallelæ, &c. Idem eſt ſi △ FNG. & GMO. baſes habeant in eadem recta FG. GO.

E converſo. Si baſes, & latera ſint Parallela, omnes anguli erunt æquales ex Parallelismo (2.l.1.) Ergo △△ æquiangula, & ſimilia (1.N.)

PROPOSITIO III.

De rectis Angularibus.

1 *Recta quæ bifariam ſecat angulum, ſecat baſim in ratione laterum, & contra.* pp 3. lib.6.

2 *Recta quæ cum latere efficit angulum oppoſito æqualem, triangulum facit toti ſimile: & latus eſt medium inter baſim, & ſegmentum conterminum, & è converſo.* Eſt Corollarium Sequentis

3 *Perpendicularis ex angulo recto efficit duo triangula toti ſimilia: & ipſa media eſt inter baſis ſegmenta: & quodlibet latus eſt medium inter baſim, & ſegmentum conterminum: & contra.* pp 8.

 4 *Per-*

4 *Perpendicula ex duobus angulis efficiunt triangula ſimilia, & ſegmenta lateribus conterminis proportionalia.*

5 *Si duæ rectæ ex angulis ſupra baſim ſecant proportionaliter latera, ſecantur etiam ipſæ proportionaliter, & è converſo.*

DEMONSTRATIO. Fig.3.

1 *In $\triangle$ GNF. recta NH. bifariam ſecet angulum GNF. Dico GH. ad HF. eſſe vt GN. ad NF.* Quia ſi ducatur HB. Parallela ipſi GN: erunt anguli alterni GNH. NHB. æquales. (2. l. 1.) ſed GNH. HNB. ſunt æquales ex *hyp.* Ergo HNB. BHN: ſunt æquales: Ergo oppoſita latera BN. BH. æqualia ſunt (5. l. 1.) ſed GH. ad HF. eſt vt NB. ad BF. (2. l. 6.) vel vt HB. ad BF: & GN. ad NF. eſt etiam vt HB. ad BF. (2. l. 6.) Ergo GH. ad HF. eſt vt GN. ad NF. (1. l. 5.)

E converſo. Si GH. ad HF. ſit vt GN. ad NF. Dico NH. ſecare bifariam angulũ GNF. Quia ducta Parallela HB: erit GH. ad HF. vt NB. ad BF. (2. l. 6.) & vt GN. ad NF. ex *hyp:* Ergo GN. ad NF. eſt vt NB. ad BF. (1. l. 5.)

l.5.) & etiam vt HB. ad BF. (2.l.6.) Ergo & HB. ad BF. eſt vt NB. ad BF. (1.l.6.) Ergo HB. & NB. ſunt æquales (2.l.5.) Ergo anguli oppoſiti ſunt æquales HNB. BHN. (5.l.1.) ſed alterni BHN. HNG. ſunt æquales (2.l.1.) Ergo æquales ſunt anguli GNH. HNB. (3.P.)

2 *In* △ cbd. *recta* dr. *efficit angulum* rdc. *æqualem oppoſito* b. *Dico* △ crd. *ſimile eſſe toti* cdb: & *latus* cd. *eſſe medium inter* cr. & cb. Quia angulus *c.* communis eſt: & *cdr. cbd.* æquales ex *hyp.* Ergo *crd. cdb.* ſunt æquales (3.l.1.) Ergo cũ △△ ſint æquiangula ſunt ſimilia: & *cr.* ad *cd:* vt *cd.* ad *cb.* (2.l.6.) Ergo *cd.* media eſt inter *cr.* & *cb.*

E converſo. Si cd. *media ſit inter* cr. & cb. *Dico angulum* cdr. *æqualem eſſe* cbd. Cum enim angulus *c.* communis ſit, & latera circa ipſum proportionalia *rc.* ad *cd:* vt *dc.* ad *cb:* erunt △ *crd.* & △ *cdb.* ſimilia (2.l.6.) & angulus *cdr.* æqualis *cbd.*

3 *Sit* △ cdb. *rectangulum,* & *ex angulo recto* cdb. *cadat perpendiculũ* dr. *Dico* △ cdr. & △ rbd. *ſimilia eſſe toti* dbc: & dr. *mediam eſſe inter* cr. rb: *tum* dc. *mediam eſſe inter* cr. cb:

cb: *tum* db. *mediam eſſe inter* br.bc. Quia anguli *crd. cdb.* ſunt recti æquales, & *c.* communis in △*crd.* & △*cdb:* Ergo & *cdr.* æqualis eſt oppoſito *b.*(3.l.1.) & *cd.* media inter *cr. cb.*(2.N.) tum angulus *b.* communis eſt △ *dbr.* & △ *cbd:* & *brd. cdb:* recti: Ergo & *bdr.* æqualis oppoſito *c.*(3.l.1.) & *bd.* media inter *br.bc.*(2.N.) Ergo △ *crd.* & △ *drb.* æquiangula ſunt eidem *cdb:* & inter ſe: Ergo proportionales ſunt *cr.* ad *rd:* vt *dr.* ad *rb.* (2.l.6.) & *dr.* media inter *cr.rb.*

E converſo. Si ex angulo recto *cdb.* recta *dr.* prædicta efficiat, erit perpendicularis, & ſi ex aliquo angulo *cdr.* perpendicularis *dr.* eadē præſtet, erit angulus *cdb.* rectus: æqualis nempe reliquis *c.* & *b.*(3.l.1.)

hoc eſt conſectarium, 4 pp. lib. 6.

4 *In △ DEN. ſint duo perpēdicula DX. EZ. Dico △ DNX. & △ ENZ. eſſe ſimilia, & ZN. ad NE. vt XN. ad ND.* Quia angulus N. eſt cōmunis: tum Z. & X. recti æquales: Ergo reliqui NDX. NEZ. ſunt æquales (3.l.1.) Ergo ſunt △△ ſimilia: & ZN. ad NE: vt XN. ad ND.(2.l.6.)

hoc eſt corollarium antecedentis.

5 *In △* cbd. *rectæ* ca. dr. *ſecat proportionaliter latera* db. *ad* ab: *vt* cb. *ad* rb. *Dico*

ſe

ſe ipſas in n. *ſecare proportionaliter* dn. *ad* nr: *vt* cn. *ad* na: *& è converſo.* Quia △ *brd.* & △ *bac.* circa communem angulum *b.* habent latera reciproca: *br.* ad *bc:* vt *ba.* ad *bd.* erunt æqualia (1.l.6.) Ergo ablato cõmuni *rnab.* remanebit △ *cnr.* æquale △ *dna:* Ergo latera circa æquales angulos verticales *cnr. dna.* erunt reciproca (1.l.6.) nempe *cn.* ad *na:* vt *dn.* ad *nr.* &c.

E converſo. Si *cn.* ad *na.* ſit vt *dn.* ad *nr:* erit △ *cnr.* æquale △ *dna.* (1.l.6.) & addito communi *rnab:* erit △ *cab.* æquale △ *drb:* Ergo latera circa communem angulum *b:* erunt reciproca (1.l.6.) nempe *br.* ad *bc:* vt *ba.* ad *bd.* & etiam vt *br.* ad *rc:* ita *ba.* ad *ad.* (4.l.5.)

PROPOSITIO IIII.

De rectilineis ſimilibus.

1 *Eidem ſimilia inter ſe ſunt ſimilia: diagonia habent in ratione laterum, & reſoluuntur in △△ ſimilia, & è contra.*

2 *Rationem habent duplicatam rationis laterum homologorum, vel ſimilium.*

3 *Deſcripta ſupra rectas proportionales ſunt*

ſunt proportionalia, & è converſo.

4 *Quod ex baſi trianguli rectanguli fit, æquatur illis quæ ex lateribus, & è contra.*

5 *Quæ intra aliam cum angulo communi ſunt, habent diagonia communia, & latera reliqua Parallela, & è converſo.*

6 *Diagonium commune ſimilia ſegmenta efficit: & complementa his proportionalia.*

7 Conſect. *In Parallelogrammis, & rectilineis diagonio biſectis ſunt cōplementa æqualia, & è converſo.*

DEMONSTRATIO. Fig. 4.

1 *Rectilinea ſimilia eidem, & inter ſe ſunt ſimilia:* Quia omnes angulo æquales habent, & latera lateribus tertij proportionalia (22. P.) Ergo, & inter ſe (1. l. 5.) Ergo ſimilia ſunt inter ſe (22. P.)

Rectilinea ſimilia diagonia habent in eadem ratione laterū, & in △△ ſimilia reſolvuntur, & è contra. Sint ſimilia ⬠ EBM. ⬠ CBR; licet inverſa: & ex æqualibus angulis F. R: ducantur diagonia FE. FN: DC. DS: & quia latera homologa, vel ſimilia ſunt proportionalia: EB. ad BC. vt FB. ad BD. (22. P.) cir-

circa æquales angulos EBF. CBD. erit △*b*. ſimile △*q*. (2.l.6.) Ergo vt FB. ad BD. ita FE. ad DC: & ſic de reliquis: Ergo cum in omnibus △△ omnia latera ſint proportionalia, erunt ſimilia (2.l.6.) nempe *z*. & *x*: tum *b*. & *g*. &c.

E converſo. Si omnia △△ ſimilia ſint, ſimiliter diſpoſita *q*.*g*.*x*: & *b*.*h*.*z*. omnes anguli erunt æquales, & latera proportionalia: Ergo EBM. & CBR: ſimilia erunt (22.P.)

2 *Si* ⌂ *EBM.* & ⌂ *CBR. ſimilia ſint: dico EBM. ad CBR. habere rationem duplicatam rationis laterum homologorum, vel ſimilium EB. ad BS.* Coniungantur enim figuræ, vt æquales anguli ſint verticales in B: & ſint tres continuæ EB. BC. CH: & erunt eædem rationes FB. ad BD: & EB. ad BC. & BC. ad CH: & ratio EB. ad CH. duplicata rationis EB. ad BC. Dico igitur ⌂ EBM. ad ⌂ CBR. eſſe vt EB. ad CH. Ductis enim CF. HF. erit △*d*. ad △*q*. æquê altum vt FB. ad BD: vel vt BC. ad CH. (1.l.6.): ſed △*d*. ad △*r*. æquê altum eſt vt BC. ad CH. (1.l.6.): Ergo quia △*d*. eandem habet rationem ad

△*q*.& ad △*r*.erunt *q*.& *r*. æqualia (2.l.5.) ſed △*b*.ad △*r*.æquè altum eſt vt EB.ad CH. (1.l.6.) Ergo etiam △*b*. ad △*q*. eſt vt EB. ad CH. (1.l.5.) nempe in ratione duplicata EB.ad BC. laterum homologorum: Idem concludetur de △*b*.& △*g*: tum de △*z*. & △*x*: Ergo △*b*+△*b*+△*z*.ad △*q*.+△*g*+△*x*. nempe ⬠ EBM.ad ⬠ CBR. eſt vt EB. ad CH.(4.l.5.) vel in ratione duplicata EB. ad BC: laterum ſimilium.

3 *Si fuerint quatuor rectæ proportionales etiam non continuæ EB.ad BC.vt NF. ad DS: & ſupra EB.& BC.ſint △b. & △q.ſimilia: tum ſupra NF: & DS: ſint △z. & △x. ſimilia inter ſe, vel quæuis aliæ figuræ ſimiles, licet prioribus diſsimiles: dico △b.ad △q.eſſe vt △z. ad △x.*

Quia △*b*.ad △*q*. eſt in duplicata ratione EB. ad BC: & △*z*. ad △*x*. eſt in duplicata ratione NF. ad DS.(2.N.) ſed quia EB. ad BC. eſt vt NF.ad DS.ex *hyp*. ratio duplicata vtriuſque eſt eadem (1.l.5.) Ergo ratio △*b*. ad △*q*: eſt eadem ratio △*z*. ad △*x*: & alternando △*b*. ad △*z*: vt △*q*. ad △*x*. & componendo,&c.(4.l.5.

E converſo. Si △b. & △q. ſint ſimilia tum △z. & △x: & ſit △b. ad △q: vt △z. ad △x. Dico latera homologa eſſe proportionalia: EB. ad BC. vt NF. ad DS. Quia *b.* ad *q.* eſt duplicata EB. ad BC: & *z.* ad *x.* eſt duplicata NF. ad DS. (2.N.) Ergo quia duplicatæ ſunt æquales: *b.* ad *q.* vt *z.* ad *x*: etiam ſimplices ſunt æquales EB. ad BC. vt FN. ad DS. (1.l.5.)

4 *Si △d. ſit rectangulum: & ſumantur rectæ FC. CB. BF. vt baſes ſimiles ſupra quas deſcribantur quævis figuræ ſimiles. Dico deſcriptam ſupra FC. æqualem eſſe reliquis ſupra CB. BF.* Quia omnes figuræ ſimiles ſunt vt quadrata, nempe in ratione duplicata laterum homologorum (2.N.) ſed □FC. æquale eſt □ CB. & □ BF. (4.l.2.) Ergo quævis figura ſupra FC. æqualis erit ſimilibus ſupra CB. & BF. (2.l.5.)

E converſo. Si figura FC. æqualis ſit ſimilibus CB. BF: quia ſunt illæ vt quadrata (2. N.) erit □ FC. æquale □ CB. & □ BF. (2.l. 5.) Ergo angulus B. erit rectus (4.l.2.)

5 *Similes figuræ* nl. mo. *habeant angulum z. communem: dico diagonia* zd. zb. zl. *eſſe*

communia, & latera Parallela. Quia figuræ ſimiles ex ſimili angulo dividuntur in △△ ſimilia (1. N.) erunt anguli *mzh. nzd.* æquales: Ergo *zh.* & *zd.* ſunt eadem recta (10. P.) ſimiliter *zi.* & *zb*; tum *zo.* & *zl*: Ergo diagonia ſunt communia. Deinde in △△ ſimilibus ſunt anguli *zhi. zdb.* æquales: Ergo *hi. db.* Parallelæ (13. P.) ſimiliter *io. bl*: & *or. lq.* Ergo, &c.

E converſo: Si diagonia ſint communia, & latera Parallela; omnia △△ erunt ſimilia (2. l. 6.) Ergo & figuræ (1. N.)

6 *Circa diagonium commune* zb. *inſcriptæ ſint figuræ ſimiles* rh. fc. *Dico ſegmenta* zndcb. bcui. ihmz. *eſſe ſimilia tum* zroi. ifeb. blqz: *& complementa* mhiucdn. roifelq. *ſegmentis proportionalia.* Quia ſegmenta ad vnam partem conſtant ex triangulis ſimilibus (5. N.) Ergo ſunt ſimilia (1. N.) & quia rectæ ſunt proportionales *zn.* ad *zq*: vt *zm.* ad *zr*: & vt *iu.* ad *if*: (22. P.) etiam totum *zndb.* ad totum *blqz*: erit vt pars *bcui.* ad partem *befi*: & vt *zmhi.* ad *zroi.* (3. N.) Ergo & reſiduum, vel complementum *mc.* ad reſiduum, vel complementum *re*; in eadem

erit

erit ratione (5. l. 5.)

7 *Conſectarium.* Si ſegmenta ſint æqualia, vt in Parallelogrammo *dq:* & in hexagono regulari, &c. etiam complementa erunt æqualia quia ſunt vt ſegmenta.

E converſo. Si complementa ſint æqualia etiam ſegmenta erunt æqualia.

PROPOSITIO V.

De Circulis, & eorum partibus.

1 *Anguli, & ſectores æqualium Circulorum ſunt vt arcus, & è converſo.* pp 33. lib.6.

2 *Arcus ſimiles, circumferentiæ, & chordæ ſunt vt radij, & è converſo.*

3 *Inæqualium Circulorum chordæ, arcus, vel ſegmenta æqualia ſunt diſsimilia: & maioris valoris in minori Circulo.*

4 *Figuræ ſimiles inſcriptæ, vel circumſcriptæ ſunt in ratione duplicata radiorum.*

5 *Et etiam ſectores, & ſegmenta ſimilia & Circuli, ſunt in eadem ratione duplicata.*

DEMONSTRATIO. Fig.5.

1 *Anguli, & ſectores ſunt vt arcus:* Quia ſi arcus CG. æqualis ſit GD : anguli, & ſecto-

ctores CBG. GBD congruent : & erunt æquales(10.P.) Si GP. eſt dimidium GC: erit ſector, & angulus GBC. duplus GBP: & ſimiliter triplus, vel quadruplus, &c. Ergo in eodẽ Circulo ſectores, & anguli ſunt vt arcus: idẽque eſt in æqualibus: & in omnibus erunt vt valores arcuum.

E converſo. Arcus erunt vt ſectores, &c.

2 *Sint arcus ſimiles CGD. EHF. ſexta Circuli pars. Dico arcus, & circumferentias integras, & chordas DC. EF. habere rationem radiorum BC. ad BF.* Quia △△ Iſocelia CBD. FBE. cum communi angulo B. ſunt ſimilia(2.l.6.) Ergo vt BC. ad BF. ita CD. ad FE.(2.l.6.) Si vero arcus bifariam dividantur in G.H : erit etiam chorda CG. ad FH: vt radius CB. ad BF : & chordæ CG. GD. æquales vt arcus CPG. GMD: tũ FH. HE: Ergo quia biſectione continuata in infinitum æquales arcus æqualibus reſpondẽt chordis in vtroque Circulo: erunt arcus inter ſe vt chordæ; vel vt radij : idemque eſt de circumferentijs integris , quia vt pars ad partem ſimilem ita totum ad totum(5. l.5.)

3 *In-*

3 *Inæqualiũ Circulorũ chordæ, arcus, & ſegmēta æqualia ſunt diſsimilia.* Si enim eſſent ſimilia eſſent vt radij (2.N.) ſed radij ſunt inæquales ex *hyp:* Ergo chordæ, arcus, & ſegmenta eſſent inæqualia contra *hypotheſim:* Ergo ſunt diſsimilia. Vnde in minori Circulo erit arcus maioris valoris, quia ſi eſſet eiuſdem valoris, eſſet arcus minor vt radius: & adhuc eſſet multo minor ſi eſſet minoris valoris: Ergo, &c.

4 *Sint BFE. BCD. ſimiles partes figurarum ſimilium Circulo inſcriptarum: Dico illas eſſe in duplicata ratione radiorum BF. BC.* Quia ſunt in duplicata ratione laterum ſimilium EF. DC. (4.l.6.) ſed chordæ EF. DC. ſunt vt radij (2.N.) Ergo figuræ inſcriptæ ſunt in duplicata ratione radiorum. Idemque omnino eſt de circumſcriptis.

5 *Sectores, ſegmenta, & Circuli ſunt in duplicata ratione diametrorum, vel radiorum.* Quia in Circulorũ ſextantibus BEF. BDC: eſt △ BEF. ad △ BDC. in duplicata ratione BF. ad BC. (4.N.) & diviſis arcubus in H. G. bifariam: eſt △ EHF. ad △ DGC: in duplicata ratione EF. ad DC. (4.l.6.) quæ eſt

du-

duplicata rationis BF. ad BC.(2.N.) & ita infinitè continuata biſectione, erunt ſemper △△ in duplicata ratione radiorum: Ergo & ſumma △△ vnius ſectoris, ſegmenti, vel Circuli ad ſummam △△ alterius erit in eadem ratione (4.l.5.) ſed ſumma △△ in infinitum eſt ipſemet ſector, ſegmentum, vel Circulus, quem componit: Ergò ſectores, ſegmenta, & Circuli ſunt in eadem ratione duplicata radiorum (2.l.5.)

Conſectarium. Ea omnia, quæ in 4. *prop.* dicta ſunt de figuris ſimilibus rectilineis, conveniunt etiam ſectoribus, & ſegmentis ſimilibus, & etiam Circulis.

PROPOSITIO VI.

De rectis in Circulo.

1. *Si duæ chordæ ſe interſecant, ſegmenta ſunt reciproca, & rectangula æqualia.*

2. *Perpendicularis ex circumferentia in diametrum eſt media inter diametri ſegmenta: & chorda eſt media inter diametrum, & ſegmentum conterminum.*

3. *Tangens eſt media inter ſecantem, & exterius ſegmentum, & è converſo.*

4 *Tangentes ex eodem puncto ſunt æquales: & duæ tantum in partes oppoſitas.* inferitur ex Coroll. 2. pp 36. lib. 3.

5 *Secantes efficiunt triangula ſimilia, & exterioribus ſegmentis ſunt reciprocæ.*

6 *Rectangula ex ſecante, & exteriori ſegmento æqualia ſunt □ tangentis, & inter ſe.* coroll. 1 pp 36. lib.

DEMONSTRATIO. Fig.6.

1 *Chordæ CF. DE. ſe interſecant in H. Dico ſegmenta eſſe reciproca CH. ad DH: vt HE. ad HF. & ▭ CHF. æquale ▭ DHE.*

△ Ductis enim DC. FE. anguli DCF. DEF. æquales ſunt, nempe dimidium arcus DF. (3.l.3.) & pariter CDF. CFE. dimidium CE. & verticales DHC. FHE. ſunt æquales (11.l.1.) Ergo △ DHC. & △ FHE. ſunt ſimilia, & latera proportionalia CH. ad HD: vt EH. ad HF. (2.l.6.) Ergo ▭ CHF. extremarum æquale eſt ▭ DHE. mediarum (1.l.6.)

2 *Sit quævis diameter DE. & ex quolibet puncto circumferentiæ C. cadat perpendicularis CO: & ducantur chordæ CE. CD.*

Dico CO. medium eſſe inter DO. OE: & EC. mediam inter ED. EO: & DC. mediam inter DE. DO. Quia angulus DCE. in ſemicirculo, rectus eſt (3.l.3.) eſt △ DCE. rectangulum: Ergo perpendiculum CO. eſt medium inter DO. OE. &c. (3.l.6.)

3. *Ex puncto B. recta BC. tangat circulum in C. & quævis alia BE. ſecet ipſum in D. & E: Dico BC. mediam eſſe inter EB. & BD. & è contra.* Quia ductis DC. CE. angulus CED. in ſegmento CFD. æqualis eſt angulo BCD: tangentis BC. & ſecantis CD. (7. l. 3.) Ergo quia in △ BCE. recta CD. efficit angulum DCB. æqualem oppoſito E. erit BC. media inter baſim EB. & ſegmentum conterminum BD. quod eſt exterius ſecantis (3. l.6.)

E converſo. Si BC. media ſit inter EB. BD. erit angulus BCD. æqualis oppoſito E. (3.l.6.) Ergo BC. erit tangens (7. l.3.)

4. *Ex puncto B: rectæ BC. BZ. tangunt Circulum in C. & Z: Dico BC. BZ. æqua-*

les

les eſſe in partes oppoſitas; & nullam aliam ex puncto B. poſſe tangere Circulum. Quia quævis tangens BC. BZ. media eſt inter eoſdem terminos EB. BD. (3. N.) Ergo BC. BZ. ſunt æquales (2.l.5.) ſed ex puncto B. duæ tantum rectæ æquales duci poſſunt in partes oppoſitas circumferentiæ convexæ (1.l.3.) Ergo ex B. duæ tantum ſunt tangentes.

5 *Si ex puncto B. ſint BE. BF. ſecantes Circulum, & ducantur rectæ EF. DG. Dico triangula BDG. BFE. eſſe ſimilia: & BE. ad BF. vt BG. ad BD.* Quia in quadrilatero DGEF. anguli DEF. DGF. æquantur duobus rectis (3.l.3.) ſed DGF. DGB. etiam æquantur duobus rectis (1.l.1.) Ergo in △△ BDG. BFE. æquales ſunt anguli BEF. BGD: & ſimiliter BFE. BDG: & FBE. communis: Ergo ſunt △△ ſimilia: & ſecans BE. ad BF. vt ſegmentum BG. ad BD. (2.l.6.) nempe reciproce proportionalia. [propriè est funda- ta super pp 22. l b. 3]

6 *Recta BC. tangit Circulum, & BE. BF. illum ſecant: dico □□ EBD. FBG. æqualia eſſe □ BC: & inter ſe.*

O 2 Quia

Quia tangens BC. media eſt inter ſecantem EB. & exterius ſegmentum BD. & ſimiliter inter FB. BG. (3.N.) Ergo □ BC. mediæ, æquale eſt ▭ EBC. extremarum: & ſimiliter ▭ FBG. (1.l.6.) Ergo & ▭▭. quia eidem □ BC. æquantur, æqualia ſunt inter ſe.

LI-

LIBER XI.

DE SOLIDIS.

CONtinet hic liber ſolidorum expoſitionem, ea ſcilicet, quæ demonſtrat Euclides in vndecimo, & duodecimo libro; & ſunt omnia quæ praxi, & ſpeculationi Geometricæ inſervire poſſunt. Corpora enim regularia de quibus egit in decimo tertio Euclides, & Hypſicles Alexandrinus in decimo quarto, & decimo quinto Elementorum, vt minus hic neceſſaria conſulto ommiſſa ſunt, ad tertiam partem noſtræ Geometriæ Magnæ in minimis relegata, vbi plura forte non iniucunda lector inveniet cap. 3. de ſolidis regularibus.

Præcipua libri huius difficultas, quæ maximè Tyronibus impedimento eſt, verſatur in eo, quod ſoliditas corporum in plana ſuperficie omnino accurata nequit repræſentari. Huic damno vt Geometræ occurrant, corpora ſcenographicè delineata proponunt, ac ſi diaphana eſſent; vt omnia la-

te-

tera, & anguli oppoſiti etiam oculis ſubij-ciantur.

Exemplo ſit figura prima, quæ repræſentat *cubum* ſex quadratis planis comprehenſum: quorum A C. eſt baſis ſupra quam inſiſtit: & F D. ſuperius planum: tum B F. & E G. latera ſunt: Frons vero B D: & dorſum F G.

Anguli ergo, & latera debitam rationem ſervare non poſſunt: quia latera B A. B C. æqualia ſunt in cubo: tum anguli B C G. B C D. D C G. recti ſunt æquales, & in plana deſcriptione apparent inæquales. Obſervanda igitur ſunt vnicê non ea, quæ apparent, ſed quæ in hypotheſi ſupponuntur, & quæ illatio neceſſaria ex iam demonſtratis concludit.

Continet liber iſte 6. Propoſitiones.

Prop. 1. *De concurſu in ſolido.*
Prop. 2. *De rectis Parallelis in ſolido.*
Prop. 3. *De Planis in ſolido.*
Prop. 4. *De ſolidorum ſectione.*
Prop. 5. *De ſolidis diſsimilibus.*
Prop. 6. *De ſolidis ſimilibus.*

PRO-

PROPOSITIO I.

De concurſu in ſolido.

1 *Si duo plana concurrant, vel ſe interſecent, communis ſectio eſt linea recta.*

2 *Eadem recta tota eſt in eodem plano; & aliud planum ſecat in vnico puncto.*

3 *Triangulum totum eſt in eodem plano, & etiam duæ rectæ ſe interſecantes.*

4 *Perpendicularis ex eodem puncto eſt vnica ſupra planum, vel ſupra duas rectas, & eſt minima diſtantia à plano.*

5 *Si eadem recta eſt pluribus in eodem puncto perpendicularis, ſunt illæ in eodem plano, cui recta eſt etiam perpendicularis.*

6 *Si recta cum tribus eiuſdem plani facit æquales angulos, eſt plano perpendicularis.*

DEMONSTRATIO. Fig. 1.

1 *Duo plana BE. & AC. concurrant, vel ſe interſecant. Dico ſectionem communem BG. eſſe lineam rectam.* Quia ſi in plano AC. ducatur quævis recta BG. poterit hæc cuilibet ſuperficiei planæ BE. congruere (7. P. 1.) Ergo tunc erit recta BG. communis vtrique pla-

plano, vel communis ſectio planorum AC. BE: Ergo è contrà ſi planum BE. concurrat cum plano AC. in punctis B. & G: communis eorum ſectio erit eadem recta BG.

2 *Sit recta BG: & pars illius BX. ſit in plano AC. Dico totam BG. infinitè continuatam eſſe in plano AC: & ſi eadem BG. ſecat planum EC. ſecare illud in vno tantum puncto G.* Quia tota recta BG. eidem plano congruit (7.P.) Ergo tota BG. eſt in plano AC. in quo eſt illius pars BX: Vnde ſi recta BG. haberet plura puncta in plano CE: pars rectæ BG: eſſet in plano CE: & conſequenter tota eſſet in eodem plano, & illud non ſecaret: Ergo ſi illud ſecat, eſt in vnico puncto G.

3. *Sit △ ABG. Dico totum eſſe in eadem plano.* Quia ſi per rectam BG. conſideretur quodlibet planum in quo fiat △ BCG: vt latera BC. CG. æqualia ſint BA. AG. & BG. commune: quia tria latera æqualia ſunt tribus alterius congruet totum △ BAG. ipſi △ BCG. (4.l.1.) Ergo △ ABG. erit eadem ſuperficie plana ſicut △ BCG.

Si vero duæ rectæ BA. AG. ſe interſecēt in A: erunt

erunt in eodē plano. Quia ſi quævis alia BG. eas ſecet fit △ ABG. in eodem plano, ex modo dictis.

4 *Sit FA. perpendicularis plano AC. vel duabus rectis AG. AB. Dico illam eſſe vnicam ex puncto plani A. vel ex puncto elevato F. & eſſe minimam diſtantiam puncti F. à plano AC.* Quia ſi ex A. ducatur quævis alia AR. erunt AF. AR. in eodem plano, quia ſe interſecāt in A. (3. N.) faciat ergo planum AFR. continuatum ſectionem AB: quæ erit linea recta plani AC. (1. N.) Ergo quia FA. eſt plano AC. perpendicularis, erit perpendicularis rectæ BA. (22. P.) & angulus FAB. erit rectus: Ergo angulus RAB. erit minor recto, pars toto. Ergo cum AR. non ſit perpēdicularis rectæ BA: neque talis erit plano AC. (22. P.)

Similiter. Si ex puncto elevato F. ducatur quævis alia FB. ducta BA: erit in plano △ FAB. (3. N.) & angulus FAB. rectus (22. P.) Ergo angulus ABF. erit minor recto (3. I. 1.) Ergo FB. eſt maior quam FA. (5. I. 1.) & non eſt perpendicularis rectæ AB. neque plano AC. (22. P.)

5 *Sit recta EG. perpẽdicularis rectis BG. AG.CG. in puncto G. Dico omnes eſſe in eodem plano AC.cui EG. eſt perpendicularis.* Rectæ enim AG.GC. ſunt in eodem plano AC. (3.N.) Ergo ſi ex puncto A. elevetur perpendicularis plano AG: erit illa perpendicularis rectis GA.GC. (22.P.) Ergo cum perpendicularis ſupra AG.GC. vnica ſit(4. N.) ipſa EG.perpẽdicularis rectis AG.GC. eſt plano AC.perpendicularis.

Inſuper. Si per rectas EGB: ſit planum EGBL.faciet ſectionem rectam G*b*.(1.N.) Ergo quia EG. eſt perpendicularis plano AC.erit perpendicularis G*b*.(22.P.) ſed etiam BG. eſt perpendicularis eidem EG. ex *hyp.* Ergo quia in eodem plano GL. perpendicularis rectæ EG.in puncto G.eſt vnica(5.l.1.)erunt GB.& G*b*. eadẽ recta: Ergo GB.eſt etiam in plano AC:cui EG. perpendicularis eſt.

6 *Recta LB. faciat æquales angulos LBA. LBG.LBC.in puncto B.plani AC.in quo ſunt rectæ BA. BG. BC. Dico LB. eſſe plano AC: perpendicularem.* Quia ſi ex B. deſcribatur Circulus AXC.& intelligantur ductæ LA.

LX.LC. quia in △△ LBA.LBX.LBC. latera BA.BX.BC. ſunt æquales radij: & LB. commune: & anguli comprehenſi æquales, erunt baſes LA.LX.LC. æquales (4.l.1.) Ergo ſi ex L. ducatur plano perpendicularis L*b*. & ducantur *b*A.*b*X.*b*C. erunt △△ *LbA. LbX. LbC.* rectangula: & □ LA. æquale □ *Lb*+□*b*A: tum □LX. æquale □ *Lb*+□*bX.* tum □LC. æquale □Lb+□*b*C: (4.l.1.) Ergo ſi ex æqualibus LA. LX. LC. auferatur commune □L*b*: remanebunt æqualia □□: & rectæ *bA.bX.bC.* Ergo quia ex puncto *b.* tres rectæ æquales ſunt in circumferẽtiam; erit centrum Circuli (1.l.3.) Ergo quia *b.* & B. idem centrum ſunt, erit perpendicularis *Lb.* ipſa recta BL: Ergo recta BL. eſt plano AC. perpendicularis, & etiam rectis BA. BG. BC.

PROPOSITIO II.

De rectis Parallelis in ſolido.

1 *Quæ eidem plano ſunt perpendiculares Parallelæ ſunt, & in vno plano.*

2 *Si vna ex Parallelis eiuſdem plani, ſit plano alteri perpendicularis: etiam reliqua.*

3 *Parallela vnica eſt per idem punctum: & duæ quælibet in eodem ſunt plano.*

4 *Quæ eidem ſunt Parallelæ, etiam inter ſe, licet non ſint omnes in eodem plano.*

5 *Quæ rectas Parallelas, vel concurrentes ſecat in eodem cum ipſis eſt plano.*

DEMONSTRATIO. Fig. 1.

1 *Sint BL. GE. perpendiculares plano AC. Dico eſſe Parallelas, & in vno plano BE.* Quia ſi ducatur BG. erit in vno plano cum GE. (1. l. 11.) Si ergo per BG. GE. tranſeat planum BE. perpendiculare plano AC. & ex B. in plano BE. ducatur BN. perpendicularis communi ſectioni BG. erit BN. Parallela GE. (2. l. 1.) & plano AC. perpendicularis (23. P.) Ergo quia BL. ex puncto B. eſt etiam plano AC. perpēdicularis ex *hyp.* cum perpendicularis ſit vnica (1. l. 11.) erit BL. ipſa BN: Ergo quia BN. eſt Parallela, & in vno plano cum EG. erit BL. Parallela ipſi EG. & in eodem plano BE.

2 *Si BL. GE. in eodem plano ſint Parallelæ, & GE. ſit plano AC. perpendicularis, etiam BL. perpēdicularis erit.* Quia ſi ex quo-

li-

libet puncto L.rectæ BL. ducatur L*b*.plano AC.perpendicularis, erit L*b*. Parallela ipſi EG. & in eodem plano LEG. (1.N.) ſed LB.eſt Parallela ipſi EG.& in eodem plano LEG.ex *hyp:* Ergo quia per idem punctum, & in eodem plano Parallela eſt vnica(13. P.)erit LB.ipſa L*b:* Ergo LB. eſt plano AC. perpendicularis.

3 *Sit in plano CF.* Fig.2.*recta CD.& pūctū A: per quod in plano CF. ducta ſit AF. Parallela ipſi CD. Dico per punctum A. in nullo plano duci poſſe aliam Parallelam ipſi CD.*

Primò in eodem plano CF.nulla alia duci poteſt,quia per idem punctum, & in eodem plano vnica eſt æquidiſtans: Deinde ſit in alio plano BF.quævis alia AE. ſi planum BF. ſi perpendiculare plano CF.& ex A.& F.ſint AC. FD. perpendiculares communi ſectioni AF.erunt etiam plano BF. perpendiculares (23.P.) & Parallelæ (1.N.) & quia CF.eſt Parallelogrammum: erunt DF. CA.æquales(7.l.1.) & quia ſunt plano BF. perpendiculares erunt minimæ diſtantiæ ab illo (1.l.11.) Ergo ſi ex D. ad quodlibet punctum rectæ AE. ducatur quævis recta

DE. erit maior quam DF. & quàm CA. (1.l.11.) Ergo recta EA. non æqualiter diſtat à recta CD: vnde nequit eſſe ipſi Parallela.

Tandem ſit recta AE. in plano BF. inclinato ad planum CF. & ſit planum CBA. perpendiculare rectæ AF. & erit etiam perpendiculare rectæ CD. (1.N.) ducatur in plano CBA. recta CB. perpendicularis ſectioni AB. & BE. plano CBA. perpendicularis, & erit in plano BF. Parallela ipſi AE, & in plano BD. Parallela ipſi CD. (1.N.) Ergo quia AE: ſecat in plano BF. vnam Parallelam AF. ſecabit etiam aliam BE. efficiens angulos alternos æquales (2.l.1.) Si ergo per E. tranſeat planum DEF. perpendiculare rectæ BE: erit reliquis Parallelis perpẽdiculare, cum binæ ſint in eodem plano (2.N.) vnde ſunt DB. BF. FC. Parallelogrãma rectangula: & oppoſita latera æqualia DE. CB: tum EF. BA. tum DF. CA. (7. l.1.) Ergo △DEF. omnino æquale △CBA. (4.l.1.) & cum angulus CBA: ſit ex cõſtructione rectus, erit etiam DEF. rectus: Ergo quia DE. perpendicularis eſt rectis EF. EB.

erit

erit plano FB. perpendicularis (1. l. 11.) Ergo etiam rectæ EA. (23. P.) & erit DE. minima diſtantia puncti D. à recta EA. (5. l. 1.) Similiter CB: quia eſt ipſis BE. BA. perpendicularis erit plano BF. perpendicularis, & minima diſtantia puncti C. à plano BF. (1. l. 11.) Ergo ſi ex C. ad quodlibet punctum rectæ EA. ducantur recta, erit maior, quam CB. & DE: quæ æquales ſunt: Ergo quia AE. non ſemper æqualiter diſtat ab omnibus punctis rectæ DC. non eſt ipſi Parallela.

Conſect. Si duæ ſint Parallelæ, ſunt neceſſario in eodē plano; quia non poſſunt æquidiſtare, quæ non ſunt in eodem plano, vt demonſtratum eſt. Quod aſſumptum ſine demonſtratione fuit ab Euclide, & Expoſitoribus, quos videre licuit.

4 *CD. & AF. ſint Parallelæ ipſi BE. Dico ipſas eſſe Parallelas.* Quia ſi planum CBA. ſit perpendiculare ipſi BE: cum BE. CD. ſint in vno plano: tum BE. AF. (3. N.) erit planum CBA. etiam perpendiculare ipſis CD. AF. (2. N.) Ergo quia CD. AF. ſunt eidem plano ABC. perpendiculares ſunt

Pa-

Parallelæ (1. N.)

5. *Sint CD. & BE. Parallelæ, vel CE. & BE. concurrentes: ſi recta CB. has, vel illas ſecet erit in eodem plano cum illis.* Quia Parallelæ ſunt in eodem plano (3. N.) & etiam concurrentes CE. BE. (1. l. 11.) Ergo ſi per puncta C. B. tranſeat quodlibet planum faciet in plano BD. vel BEC. ſectionem rectā CB. (1. l. 11.) Ergo rectam CB. ſecans Parallelas, vel concurrentes eſt in eodem plano cum ipſis.

PROPOSITIO III.

De Planis in ſolido.

1. *Si recta ſit plano perpendicularis, omnia plana per illam, vel quorum illa eſt communis ſectio, ſunt plano perpendicularia, & è converſo.*

2. *Plana Parallela habent commune perpendiculum, & è converſo.*

3. *Si planum ſecet plana Parallela, ſectiones ſunt Parallelæ: & plana per Parallelas; vel ſunt Parallela, vel ſectiones faciunt Parallelas.*

4. *Si anguli ſint Paralleli æquales ſunt, & in*

in vno plano, vel in planis Parallelis.

5 *Si plures anguli plani comprehendant angulum ſolidum, maior omnium minor eſt reliquis, & omnes minores quatuor rectis.*

6 *Si ſex plana bina Parallela, comprehendant Parallelepipedum, omnia ſunt Parallelogramma; & oppoſita ſunt ſimilia, & æqualia.*

DEMONSTRATIO. Fig. 1.

1 *Sit recta GE. perpendicularis plano AC: Dico planum quodlibet BE. tranſiens per EG. eſſe perpendiculare plano AC.* Quia ſi in plano BE. ſumatur quodlibet punctum L: & ducatur LB. perpendicularis communi ſectioni BG: cũ in plano BE. anguli EGB. GBL. ſint duo recti erunt LB. EG. Parallelæ (2. l. 1.) Ergo cum EG. ſit plano AC. perpendicularis, etiam talis erit LB. (2. l. 11.) Ergo cum in plano BE. quælibet LB perpẽdicularis ſectioni BG. ſit etiam plano AC. perpendicularis, erit planum BE. perpendiculare plano AC.

Vnde ſi EG. ſit communis ſectio planorum BE. CE: erit vtrumque perpendiculare plano

no AC. Quia vtrumque tranſit per EG: plano AC. perpendicularem.

E converſo. Si plana BE. DB. ſint plano AC. perpendicularia, eorum ſectio BL. erit plano AC. perpendicularis. Quia ſi ex quolibet puncto L. communis ſectionis BL. ducatur L*b*. ſectioni BG. plani BE. perpendicularis, erit L*b*. plano AC: perpendicularis (23. P.) & ſi ex eodem puncto L. ducatur in plano BD. recta LB. ſectioni BC. perpendicularis, erit LB. plano AC. perpendicularis: Ergo cum hæc ſit vnica, erit eadē recta L*b*. & LB. (1. l. 11.) Ergo cum ſit in vtroque plano erit communis eorum ſectio plano AC. perpendicularis.

2 *Si plana FD. AC. Parallela ſint, & LB. ſit vni perpendicularis, etiam alteri perpendicularis erit, & è converſo.* Quia ſi LB. ſit perpendicularis plano AC. & in eo ſumantur quævis puncta C. G. ex quibus ſint CD. GE. perpendiculares eidem plano AC: Parallelæ erunt BL. CD. GE. (2. l. 11.) & æquales, quia ſunt æquales diſtantiæ duplicis plani Paralleli FD. AC. (23. P.) Ergo cum BL. CD. ſint Parallelæ æquales in eodē pla-

plano (2.l.11.) & anguli B.C. recti, erit BD. Parallelogrammum rectangulum (7.l.1.) & ſimiliter LG: Ergo quia anguli DLB. ELB. ſunt recti; erit BL. perpendicularis plano FD.

Similiter planum BE. erit vtrique plano FD. AC. perpendiculare, quia tranſit per commune perpendiculum LB. (1.N.)

E converſo. Si plana FD. AC. habeant commune perpendiculum, nempe rectam LB. erunt plana FD. AC. Parallela. Quia ſi ex punctis C. G. ſint CD. GE. perpendiculares plano AC: erunt Parallelæ BL. CD. GE. & quævis binæ in eodem plano, & omnes vtrique plano perpendiculares ſicut BL. (2.l.11.) Ergo cum anguli in B. C. G. L. D. F. ſint recti, erunt BD. DG. GL. Parallelogramma rectangula, & oppoſita latera æqualia (7.l.1.) Ergo quia omnes diſtantiæ planorum ſunt æquales BL. CD. GE. &c. erunt plana FD. AC. Parallela. Si autem plana FD. AC. habeant commune planum perpendiculare, non ſequitur illa eſſe Parallela, quia poſſunt habere communem ſectionem priori plano perpendicularem (1.N.)

3 *Sint plana FB. EC. Parallela ſecta plano BE. Dico ſectiones BL. GE. Parallelas eſſe.* Quia ſi planum AC. fiat perpendiculare communi ſectioni BL: erit AC. perpendiculare ipſis FB. BE. (1. N.) Ergo cum plana FB. EC. Parallela ſint eſt AC. vtrique perpendiculare (2. N.) Ergo quia AC. eſt tribus FB. BE. EC. perpendiculare, eorum ſectiones GE. BL. ſunt ipſi AC. perpendiculares (1. N.) Ergo, & inter ſe Parallelæ (2. l. 11.)

Si Parallelæ ſint BL. GE. tranſire poſſunt per illas plana Parallela BF. CE: vel etiam non Parallela BD. DG. ſed eorum ſectio DC. erit ipſis BL. GE. Parallela. Quia ſi planum AC. fiat perpendiculare rectæ BL: perpendiculare etiam erit Parallelæ GE. (2. l. 11.) Ergo cum AC. perpendiculare ſit ſectionibus BL. GE. trium planorum BD. DG. GL: erit AC. perpendiculare tribus planis BD. DG. GL. (1. N.) & etiam tribus ſectionibus BL. EG. CD. (1. N.) Ergo ſunt illæ inter ſe Parallelæ (2. l. 11.)

4 *Si anguli DLE. CBG. habeant latera DL. CB. Parallela, tum LE. BG. erunt æqua-*

æquales, & in vno plano, vel in planis Parallelis: Quia ſi ſumantur æquales DL. LE. GB. BG: & ducātur LB. DC. EG. quia LD. BC. Parallelæ æquales ſunt, & in eodē plano (2. l. 11.) erunt LB. DC: & ſimiliter EG. DC. æquales, & Parallelæ (7. l. 11.) Ergo quia DC. EG. Parallelæ æquales ſunt, & in eodem plano (2. l. 11.) Erunt etiā ED. GC. Parallelæ æquales (7. l. 1.) Ergo quia in △ DLE. tria latera æqualia ſunt tribus lateribus △ CBG. omnia erunt æqualia, nempe anguli DLE. CBG. (4. l. 1.) Ergo ſi plana DEL. CBG. ſint diverſa erūt Parallela, quia ſunt ipſamet triangula Parallela (1. l. 11.)

5 *Si plures anguli plani PXQ. QXS. SXZ. angulum ſolidum efficere poſsint, maior omnium PXQ. debet eſſe minor reliquis omnibus ſimul ſumptis*: Quia ſi PXQ. reliquis eſſet æqualis, congruere poſſet illis, & efficeret ſuperficiem planam; Ergo non comprehenderent ſpatium ſolidum.

Omnes vero ſimul ſumpti minores eſſe debent quatuor rectis. Aliter enim ſuperficiem planam efficerent (1. l. 1.) Si autem tres dicti anguli, vel plures, minores ſint quatuor re-

ctis,

ctis; ablato ſpatio PXZ; ſi plana inflectantur per rectas XQ. XS: & coniungantur rectæ XP. XZ. elevabitur punctum X. in quo fiet angulus ſolidus.

Hoc intelligendum eſt ſi omnium planorum inclinatio interiorem ſolidi partem reſpiciat. Si autem aliquorum inclinatio ſit ad exteriorem partem, poterunt omnes anguli quatuor rectos æquare, imo & ſuperare, vt pater in Pyramide habente baſim admodum ſtellæ.

6. *Sit ſolidum Parallelepipedum FC. ſex planis quorum bina oppoſita ſint Parallela. Dico illa eſſe Parallelogramma, & oppoſita eſſe ſimilia, & æqualia.*

Plana enim Parallela FD. AC. ſecta ſunt plano EC: Ergo ſectiones ED. GC. ſunt Parallelæ (3. N.) ſimiliter plana Parallela FG. LC. plano CE. ſecta ſunt, & ſectiones EG. DC. Parallelæ (3. N.) Ergo EC. eſt Parallelogrammum: eadem eſt demonſtratio de omnibus: Ergo.

Deinde oppoſita latera ſunt æqualia (7. l. 1.) FL. ED. GC. AB: tum FE. LD. BC. AG: tum FA. LB. DC. EG: & anguli FLB. EDC.

EDC. Paralleli æquales (4. N.) ſimiliter LFA. DEC. tū FAB. EGC & ABL. GCD. Ergo Parallelogramma oppoſita AL. GD. cum omnia latera habeāt æqualia, & etiam angulos, congruent, & erunt æqualia, & ſimilia (1. P.) & ſic de reliquis.

PROPOSITIO IIII.
De ſolidorum ſectione.

1 *Si Pyramis fuerit ſecta plano baſi Parallelo, ſectio eſt ſimilis baſi, & omnes rectæ à vertice in eadem ratione ſecantur; & è converſo. Idem eſt de Cono.*

2 *Si Pyramis baſim habeat Parallelogrammam; ſecatur biſariam plano per verticē, & oppoſitos baſis angulos.*

3 *Si Parallelepipedum, Priſma, aut Cylindrus ſecta fuerint plano baſi Parallelo, ſectio eſt omnino baſi æqualis.*

4 *Et eorum ſegmenta ſolida, laterum ſegmentis proportionalia ſunt, & è contra.*

5 *Si Parallelepipedum per oppoſitos planorum oppoſitorum angulos ſectum fuerit; ſegmenta erunt duo Priſmata æqualia.*

6 *Quodlibet Priſma Polygonum dividitur*

tur in tot Priſmata triangularia duo minus, quot latera: & Pyramides Polygonæ ſimiliter.

DEMONSTRATIO.

1 *Sit Pyramis VXZD.* (Fig. 2.) *quam ſecet planum QRT. baſi VXZ. Parallelum: Dico ſectionem QRT. ſimilem eſſe baſi VXZ.* Cum enim plana Parallela VXZ. QRT. ſecta ſint planis Pyramidis VXD. XZD. ZVD. erunt ſectiones Parallelæ VX. QR: & XZ. RT: & ZV. TQ. (3. l. 11.) Ergo cum bini anguli ſint Paralleli, æquales ſunt Q. V: & X. R: & Z. T. (3. l. 11.) Ergo & triangula æquiangula ſunt ſimilia (2. l. 6.) & etiam vt DQ. ad QV. ita DR. ad RX: & ita DT. ad TZ. idemque eſt de qualibet recta à vertice D. in baſim (2. l. 6.) Idem etiam eſt de Pyramidibus Polygonis: tum quia in triangulares reſolvi poſſunt.

2 *Pyramis VXYZD. baſim habeat Parallelogrammam, & ſecta ſit plano DXZ. Dico bifariam eſſe diviſam.* Quia vbicumque eã ſecet planum QS. baſi Parallelum, erit ſectio QS. Parallelogramma, & ſimilis baſi VY. (1. N.) Ergo planum XZD. faciens ſectionem

nem RT: dividet Parallelogrammum QS. bifariam (7.l.1.) & △ QRT. ſemper æquale △ RTS: Ergo quia ſegmenta ſolida VXZD. XYZD. ſemper ex æqualibus planis componuntur, æqualia ſunt inter ſe, & Pyramis bifariam ſecta.

3 *In Priſmate PF.* (Fig. 2.) *Parallela ſunt plana QPTSR. EDHGF. Dico eſſe omnino æqualia.* Quia ſectiones EF. QR. ſunt Parallelæ tum ED. QP. (3.l.11.) & latera RF. QE. Parallela (24.P.) Ergo quia RE. Parallelogrammum eſt, erunt latera oppoſita QR. EF. æqualia (7.l.1.) ſimiliter QP. ED. &c. Ergo quia anguli RQP. FED. ſunt Paralleli, erunt æquales (3.l.11.) & ſic de reliquis: Ergo quia in planis QPTSR. EDHGF. omnia latera ſunt æqualia, & omnes anguli: erunt plana omnino æqualia ex congruentia. Idem eſt de Parallelepipedo GA. *Fig.* 3. Et de Cylindro cuius baſis eſt Circulus, quaſi Polygonum infinitorum laterum.

4 *Eorum ſolida ſegmenta ſunt vt laterum ſegmenta.* Quia (*Fig.* 3.) ſi planum PN. bifariā fecet omnia latera, quia PN. omnino eſt æquale baſi CA. ipſi congruet: ſimiliter pla-

 num

num GO. ipſi PB. & ſic de reliquis: Ergo totum ſolidum GN: congruet ipſi PA. ſi penetrata intelligantur: vnde ſunt æqualia ſegmenta (1. P.)

Deinde ſi planum LI. baſi Parallelum bifariam ſecet latera ſegmenti PA: erit ſegmentum PI. æquale ipſi LA: & ſegmentum PA. vel PE. duplum ſegmẽti LA: & ſegmẽtum GI. triplum ſegmenti LA: & totũ GA. quadruplum eiuſdem LA: prout ſcilicet latera CL. LP. ſunt æqualia: & CP. duplum CL: & LG triplum, & CG. quadruplum, & ita infinite: Ergo ſegmenta ſolida ſunt in ratione æquali, dupla, tripla, vel quadrupla, &c. prout laterum ſegmenta: Eadem omnino eſt demonſtratio in Priſmate triangulari, vel Polygono, & etiam in Cylindro; qui eſt vt Priſma infinitorum laterum.

5 *Si Parallelepipedum GA. ſectum fuerit plano BH: per oppoſitos planorum angulos H. F. B. D. ſegmenta ſolida erunt duo priſmata æqualia.* Quia vbicumque ſit planum PN. baſi CA. Parallelum, erit ſectio PN. æqualis baſi CA: (3. N.) & planum BH. faciens ſectionem rectam OQ. (1. l. 11.) ſecabit Parallelum

rallelogrammum PN. bifariam (7.l.1.) Ergo quia ſegmenta ſolida BDG. BDE. ſemper ex æqualibus planis componũtur, erunt æqualia: & quia BH. Parallelogrammum eſt (3.l.11.) erunt BDG. BDE. duo Priſmata triangularia æqualia.

6 *Priſma Polygonum in Priſmata triangularia dividitur.* Quia ſi per quodlibet latus QE. (*Fig.* 2.) & oppoſita latera Parallela ducantur plana facient ſectiones EG. QS. tum EH. QT. Parallelas (3.l.11.) Ergo erit Priſma baſis Pentagonæ diviſum in tria Priſmata triangularia: ſcilicet in duo minus quam latera, & ſic de reliquis.

PROPOSITIO V.

De ſolidis diſsimilibus.

1 *Quodlibet Priſma triangulare, eſt dimidium Parallelepipedi.*

2 *Quælibet Pyramis eſt tertia pars Priſmatis eiuſdem baſis, & altitudinis: & ſimiliter Conus tertia pars Cylindri.*

3 *Parallelepipeda, Priſmata, & Cylindri, cum æquali altitudine ſunt vt baſes, & è converſo: & ſimiliter Pyramides inter ſe.*

4 *Eadem habent rationem compoſitam ex rationibus baſium, & altitudinum.*

5 *Eadem ſi baſes, & altitudines habent reciprocas ſunt æqualia, & è converſo.*

6 *Si ex tribus rectis continuis fiat Parallelepipedum æquale erit illi, quod fit ex media cum æquali angulo.*

Conſect. Idem eſt de Priſmate triangulari, vel de Pyramide trilatera.

DEMONSTRATIO.

1 *Sit Priſma triangulare BDG.* (Fig.3.) *Dico eſſe dimidium Parallelepipedi.* Quia ſi BA.DA. fiant Parallelæ ipſis CD.CB: & AE.ipſis BF.DH. continuato plano GFH. Parallelo ipſi GA.erunt ſectiones EF. EH. Parallelæ ipſis AB.AD.(3.l.11.) Ergo erit GA.Parallelepipedũ (24.P.)& plano BH. bifariam ſectum (4.l.11.) Ergo Priſma BDG.eſt dimidium Parallelepipedi AG; vt triangulum dimidium Parallelogrammi.

2 *Sit Pyramis triangularis CBAE.* (Fig. 2.) *Dico eſſe tertiam partem Priſmatis cum eadem baſi, & altitudine.* Quia ſi ex angulis C. & A.fiant CD.AF.Parallelæ ipſi BE: erunt inter ſe Parallelæ, & binæ in eodem plano (2.l.11.) Ergo ſi planũ EDF. ſit baſi CBA. Parallelum, erunt ſectiones DE. EF. FD. Parallelæ ipſis CB. BA. AC. (3.l.11.) & CBF. Priſma triangulare (24.P.) Deinde ſi per tria puncta D.A.E.conſideretur planum DAE.quia Pyramis DCAFE.baſim habet

CF.

CF. Parallelogrammam, erit bifariam ſe-
cta, & Pyramides CADE. AFDE. æquales
(4.l.11.) Similiter, quia Pyramis BCDEA.
baſim habet DB. Parallelogrammam, bifa-
riam erit ſecta plano CAE. per verticem A.
& oppoſitos angulos baſis E. C. (4.l.11.)
Ergo etiam Pyramides CBEA. CDEA.
ſunt æquales: Ergo quia Pyramides CBEA.
ADFE. æquales ſunt ipſi DCAE. ſunt etiam
æquales inter ſe (3.P.) Vnde cum Priſma in
tres æquales partes ſit diviſum, erit Pyramis
CBAE. tertia pars Priſmatis.

Idem eſt de Pyramide Polygona, quia in
triangulares dividitur, & Priſma Polygo-
num etiam in triangularia (4.l.11.) Simili-
ter quia Circulus eſt quaſi Polygonum in-
finitorum laterum, idem de Cono, quod de
Pyramide Polygona convincitur: & etiam
quod de triangulari (1.l.5.)

3 *Si Parallelepipeda PA.ZR.* (Fig.3.) *ha-
beant æqualem altitudinē, nēpe inter plana Pa-
rallela: Dico eſſe inter ſe vt baſes CA.TR.*
Quia ſi planum CA. continuatum tranſeat
per TR. & PN. per ZX: & quodlibet aliud
planum ipſis Parallelum efficiat ſectiones

LI.

LI. VS: vbicumque, erit LI. æqualis CA: & VS. æqualis TR. (4. l. 11.) Ergo LI. ad VS. erit vt baſis CA. ad baſim TR. (2. l. 5.) ſed totidem plana tranſire poſſunt inter PN. CA: & inter ZX. TR. quia PN. ZX. ſunt idem planum cōtinuatum; & ſimiliter CA. TR: Ergo quia ſolida PA. ZR: ſemper ex planis componuntur in ratione CA. ad TR: erit ſolidum PA. ad ZR: vt planorum ſumma ad ſummam, nempe vt baſis CA. ad baſim TR. (4. l. 5.)

E converſo. Si baſes CA. TR. ſint æquales, erit Parallelepipedum GA. ad ZR: vt altitudo GC: ad ZT. Quia ſi baſes ſint in eodem plano, & planum XZ. continuatum faciat ſectionem PN. quia PA. & ZR: ſunt æquè alta erunt vt baſes, ex iam demonſtratis: ſed baſes ſunt æquales ex *hyp:* Ergo PA. & ZR. erant æqualia: ſed GA. ad PA: eſt vt GC. ad PC. (4. l. 11.) Ergo etiam GA. ad ZR: erit vt GC. ad PC: hoc eſt vt altitudines (2. l. 5.)

Vtraque demonſtratio vniverſalis eſt, licet ſolida ſint diverſæ ſpeciei: quia pro ZR: ſubſtitui poteſt Priſma quodlibet, vel Cylin-

lindrus æqualis baſis, & altitudinis : Idemque eſt de Pyramidibus, & Conis inter ſe: tum quia tertia pars ſunt Priſmatum, & Cylindrorum.

Confect. Quia Cylindri, & Priſmata æqualis baſis, & altitudinis ſunt æqualia, & ſimiliter Coni, & Pyramides; cum Pyramis ſit tertia pars Priſmatis, etiam Conus: & cum ſit Conus tertia pars Cylindri, etiam Pyramis.

4 *Sint Parallelepiped. GA. ZY. & vt baſis TY. ad CA. ita ſit* x. *ad* z: *& vt altitudo TZ. ad GC. ita* z. *ad* y: *Dico ZY. ad GA: eſſe vt* x. *ad* y: *vel in ratione compoſita baſium, & altitudinum.* Quia ſi baſes TY. CA. ſint in eodem plano, & continuetur planum ipſi Parallelũ pZ. efficiet ſectionem PN: Ergo ſolidum ZY. ad PA. æquè altum erit vt baſis TY. ad CA. (3. N.) vel vt *x*. ad *z*: ſed PA. ad GA: ſupra eandem baſim eſt vt altitudo CP. ad CG. (3. N.) vel vt *z*. ad *y*. ſed quia ſunt tria ſolida ZY. PA. GA: ratio ZY. ad GA. eſt compoſita ex ratione YZ. ad GA. vel *z*. ad *y*. (21. P.) Ergo ratio ZY. ad GA. eſt vt *x*. ad *y*: (1. l. 5.) nempe compoſita ex *x*.

ad

ad z.: & z. ad y: vel ex rationibus baſium, & altitudinum.

Idem omnino eſt ſi Parallelepipedum cum Priſmate, vel Cylindro compareтur; vel Pyramis Pyramidi, aut Cono, vel è converſo.

5 *Si Parallelepipeda ZY. GA. baſes, & altitudines habeant reciprocas YT. ad CA. ut CG. ad TZ. erunt æqualia, & è contra.* Quia ſi vt YT. ad CA. ita ſit x. ad z.: & vt TZ. ad CG. ita z. ad y: erit CG. ad TZ. vt y. ad z. (4. l. 5.) ſed YT. ad CA. eſt vt CG. ad TZ. ex *hyp*. Ergo etiam x. ad z.: erit vt y. ad z.: (11. l. 5.) Ergo quia x. & y. eandem habent rationem eidem z.: erunt inter ſe æquales (2. l. 5.) ſed ZY. ad GA. eſt vt x. ad y. (4. N.) Ergo etiam ZY. & GA. erunt æqualia, nempe in eadem ratione æqualitatis (11. l. 5.)

E converſo. Si ZY. & GA. ſint æqualia, erit baſis TY. ad CA: vt altitudo CG. ad TZ.: baſes, & altitudines reciprocæ. Quia YZ. ad GA. eſt vt x. ad y. (4. N.) Ergo quia YZ. & GA. ſunt æqualia, etiam x. & y. ſunt æquales (1. l. 5.) Ergo eadem eſt ratio x. ad z.: quæ y. ad

z.(2.l.5.)ſed ratio *x*.ad *z*.eſt vt TY.ad CA: & *y*.ad *z*.vt CG.ad TZ: quia *z*. ad *y*. eſt vt TZ.ad CG. ex *hyp.* Ergo eadem etiam eſt ratio baſis TY. ad CA: quæ altitudinis CG. ad TZ.(1.l.5.) Ergo baſes, & altitudines ſunt reciprocæ.

Idem omnino eſt ſi Parallelepipedum Priſmati, vel Cylindro comparetur: vel Pyramis Cono: vt antea dixi(4.N.)

6 *Si fuerint tres continuæ AB. BC. CG: ex quibus fiat Parallelepipedum GA: & Yq. qY. YZ: æquales ſint mediæ BC: & fiat Parallelepipedum ZY: ex ipſis cum æqualibus angulis. Dico GA. & ZY. eſſe æqualia.* Quia baſis *qp.* ex media *qY.* æqualis eſt baſi AF. ex extremis AB. BF. vel CG.(1.l.6.) Ergo quia altitudines ſunt æquales *BC. qY*: ex eadem media, erit ZY. æquale GA.(3.N.)

Conſect. Idem eſt de Priſmate, quia eſt dimidium Parallelepipedi, & de Pyramide tertia parte Priſmatis.

 PRO-

PROPOSITIO VI.

De ſolidis ſimilibus.

1 *Eidem ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia, & in ſimiles Pyramides reſolvuntur.*

2 *Rationem habent triplicatam laterum homologorum, & ſphæræ radiorum.*

3 *Supra rectas proportionales ſunt proportionalia, & è converſo.*

4 *Quæ intra aliud ſimile inſcripta ſunt, cum angulo communi, latera, & plana habent Parallela, & è converſo.*

5 *Planum tranſiens per angulos, & latera communia, efficit ſegmenta ſimilia; & complementa ſegmentis proportionalia.*

DEMONSTRATIO. Fig. 4.

1 Prima pars vt axioma aſſumi poteſt; vel ſi libuerit, demonſtrabitur prout in figuris planis (4.1.6.)

2 *Sint Parallelepipeda ſimilia AH. RC: & erunt latera homologa, vel ſimilia AB. ad*

BC: vt DB. ad BE. & vt FB. ad BG. & in eadem ratione, ſint continuæ P. Q. X. Z: & erit ratio P. ad Z. triplicata rationis P. ad Q. vel AB. ad BC: Dico igitur ſolidum AH. ad RC. eſſe vt P. ad Z: vel in ratione triplicata laterum ſimilium AB. ad BC. Quia ſi æquales anguli ſolidi coniungantur in B. vt ſimilia latera DB. BE. eandem rectam efficiant DE: & ſimiliter FB. BG: rectæ FG. DE. ſe interſecantes erunt in eodem plano HR. (1. l. 11.) Si ergo continuentur plana in M. & C. adduntur duo ſolida HC. BM; cum igitur ſint quatuor ſolida AH. HC. BM. CR: ratio AH. ad CR: compoſita eſt ex ratione AH. ad HC: & HC. ad BM: & BM. ad CR. (21. P.) ſed quia Parallelepipedum AN. ſectum eſt plano HB. erit AH. ad HG: vt AB. ad BC. (4. l. 11.) vel vt *P.* ad *Q:* & ſimiliter HC. ad BM. vt DB. ad BE: vel vt *Q.* ad *X:* & BM. ad CR. vt FB. ad BG: vel vt *X.* ad Z (4. l. 11.) Ergo AH. ad CR: eſt vt *P.* ad Z: vel in ratione triplicata *P.* ad *Q:* vel laterum ſimilium AB. ad BC.

De *Priſmatibus*, & *Cylindris* id ipſum concluditur, quia Parallelepipedis ſupra æqualem

lem baſim, & altitudinem ſunt æqualia.

De *Pyramidibus* etiam, & *Conis*, qui ſunt tertia pars Priſmatis, & Cylindri.

De *ſolidis regularibus*, & *irregularibus*, quia in Pyramides ſimiles reſolvuntur.

De *Sphæris* etiam inter ſe, quia fit inductio de ſolidis *inſcriptis*, & *circunſcriptis*, quemadmodum de planis Circulo inſcriptis (5.l.6.)

3 *Sint quatuor rectæ proportionales P. Q. X. Z. continuæ, vel non continuæ, ſi ſupra P. & Q. deſcripta ſint duo ſolida ſimilia; & alia duo ſupra X. Z. ſimilia inter ſe, licet prioribus diſsimilia: Dico ſolida eſſe etiam proportionalia.* Quia *ſolidum* P. ad *Sol* Q: eſt in triplicata ratione rectæ P. ad Q: (2. N.) & *Sol.* X. ad *Sol.* Z. in triplicata ratione rectæ X. ad Z. (2. N.) ſed ratio P. ad Q. eſt eadem quæ X. ad Z. ex *hyp:* Ergo rationes ipſarum duplicatæ etiam ſunt eædem (1.l.5.) Ergo eadem eſt ratio *Sol.* P. ad *Sol.* Q: quæ *ſolidi* X. ad *ſol.* Z: Et quia ſunt quantitates eiuſdem ſpeciei, nempe ſolida, etiam alternando erunt proportionalia ſolida P. ad X: vt Q. ad Z. (4.l.5.)

Con-

Conſect. Si quatuor rectæ P. Q. X. Z. ſint continuæ, etiam ſolida ſupra ipſas vt baſes homologas, erunt continua in ratione triplicata nempe vt P. ad Z.

4. 5. Quarta, & quinta Propoſitionis partes, eodem modo ſunt demonſtrandæ quo partes quinta, & ſexta propoſitionis 4. *lib.6.* ſed demonſtrationem ommitto, ne linearum multitudo rei per ſe claræ tenebras offundat.

Geometriæ ſpeculativæ finis.